РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, В. М. Курочкин, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, С. П. Фиников, С. В. Фомин*

Рефераты 2046—2483 **№ 5** **Май 1955 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

2046. **Вступительное слово президента Академии наук СССР академика А. Н. Несмеянова (на годичном собрании Академии наук СССР. 1 февраля 1954 г.).** Несмеянов А. Н., Вестн. АН СССР, 1954, № 3, 15—22

2047. **Основные итоги научной деятельности Академии наук СССР за 1953 год (Доклад на годичном собрании Академии наук СССР. 1 февраля 1954 г.).** Сисакян Н. М., Вестн. АН СССР, 1954, № 3, 23—42

2048. **Приветствие Китайской академии наук от Академии наук СССР.** Несмеянов А. Н., Топчиев А. В., Вестн. АН СССР, 1954, № 10, 3—4

2049. **Приветствие Германской академии наук в Берлине от Академии наук СССР.** Несмеянов А. Н., Топчиев А. В., Вестн. АН СССР, 1954, № 10, 17—18

2050. **О состоянии и направлении дальнейшего развития научной деятельности Академии наук Грузинской ССР.** Вестн. АН СССР, 1954, № 9, 70—71

2051. **Некоторые соображения о развертывании научной работы в области математики.** Хуа Ло-гэн (對於展開數學研究工作的意見. 華羅庚), 科學通報 (Кэсюэ тунбао), 1954, № 10, 51—55 (кит.)

2052. **Развитие и роль польской науки при народно-демократическом строе.** Дембовский (Rozwoj i funkcja nauki polskiej w ustroju demokracji ludowej. Dembowski Jan), Nauka polska, 1954, 2, № 3, 1—14 (польск.)

2053. **Год работы Чехословацкой академии наук.** Шорм Ф., Вестн. АН СССР, 1954, № 9, 65—69

2054. **Расширенное заседание 27—28 марта 1954 г. Совета правления физико-математического научного общества Румынии с представителями филиалов** (Şedinţa lărgită din 27—28 martie 1954 a Consiliului de conducere al societăţii de ştiinţe matematice şi fizice din R. P. R. cu reprezentanţi ai filialelor), Gaz. mat. şi fiz., 1954, **A6**, № 4, 188—194 (рум.)

2055. **Заседания Ленинградского общегородского математического семинара.** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3, 253—256

22 сентября 1953 г. Посвящено памяти Е. И. Золотарева. В. И. Смирнов, Вступительное слово; Б. А. Венков, О работах Е. И. Золотарева по теории чисел; И. П. Натансон, О работах Е. И. Золотарева по конструктивной теории функций.

13 октября 1953 г. С. Г. Михлин, Об интегрировании уравнения Пуассона в бесконечной области; А. В. Малышев, О целых точках на эллипсоидах.

27 октября 1953 г. Б. Н. Делоне, О росте дискриминантов полей алгебраических чисел данной степени; В. И. Смирнов, О сопряженных функциях.

10 ноября 1953 г. А. Д. Александров, О международном съезде геометров; П. С. Новиков, Проблема тождества в теории групп.

24 ноября 1953 г. Ю. В. Линник, А. П. Хусу, Математико-статистическое описание неровностей профиля поверхности при шлифовании; П. Н. Реморов, Обзор исследований по теореме Ферма и сходным с ней задачам.

8 декабря 1953 г. Е. С. Ляпин, О системах операторов с неподвижными точками; Ю. Г. Решетняк, Изотермические координаты в многообразиях ограниченной кривизны.

22 декабря 1953 г. О. А. Олейник, Об уравнениях в частных производных с малым параметром при старших производных. Х. Л. Смолицкий, О приближенном разложении многочленов на множители.

2056. **Конференция, посвященная вопросам марксистско-ленинской философии в математике и ее преподавании.** Уч. зап. Харьковск. ун-та, 1952, **40**, 147—152 (журнал вышел из печати в 1954 г.)

В ноябре 1952 г. состоялась конференция, организованная физико-математическим факультетом Харьковского государственного университета и Харьковским математическим обществом, посвященная вопросам марксистско-ленинской философии в математике и ее преподавании.

На конференции были прочитаны следующие доклады:

А. Д. Александров, А. В. Погорелов, Марксистско-ленинская философия и математика; Г. И. Дринфельд, Некоторые выводы из основных положений марксистско-ленинской философии для математики и ее преподавания; Д. З. Гордевский, О формализме в математике; А. Я. Повзнер, Критика фашистско-идеалистической теории «Кибернетика».

2057. О математических исследованиях, проведенных в Национальном институте прикладного анализа в течение четверти века его существования. Пиконе (Sull'opera matematica dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo nel decorso quarto di secolo della sua esistenza. Picone Mauro), Atti IV congr. Unione mat. ital, 1953, 1, 27—44 (итал.)

Подробный доклад, сделанный на 4-м конгрессе Итальянского математического объединения, о истории создания упомянутого в заглавии института (идея организации возникла в период первой мировой войны в связи с необходимостью создания новых таблиц для артиллерийской стрельбы) и его исследованиях в области математики. Сообщается о деятельности в институте отдельных математиков (автор является одним из создателей и бессменным руководителем института); излагаются конкретные результаты, опубликованные в трудах института, в частности, результаты по решению линейных функциональных уравнений (с применением функционального анализа, прямых методов вариационного исчисления, преобразования Лапласа, а также вычисление собственных значений), нелинейных дифференциальных уравнений, по тауберовым задачам, по асимптотическим разложениям и по вариационному исчислению. *М. К. Керимов*

2058 К. Бюллетень научной студенческой конференции 1953 г. (Львовск. ун-т). Ч. 2 (Бюлетень наукової студентської конференції 1953 року (Львівський державний ун-т), 49 стр., Львів — Харків, Видавництво Харківського ун-ту, 1953) (укр.)

Приводятся резюме докладов по естественным наукам, прочитанных на научной студенческой конференции. В частности, по математике были прочитаны следующие доклады: Данилюк (І. І. Данилюк), О квадрируемости поверхности в смысле Лебега; Стефанович (Г. Н. Стефанович), Система линейных дифференциальных уравнений, инвариантных относительно группы вращений; Гестрин (Г. Н. Гестрін), О единственности тригонометрического разложения.

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

2059. 150 лет Казанского университета. Шофман А. С., Вестн. высш. школы, 1954, № 11, 47—51

2060. В. Я. Буняковский — выдающийся русский ученый и педагог. (К 150-летию со дня рождения). Прудников В. Е., Матем. в школе, 1954, № 4, 15—24

Краткие биографические сведения и очерк научно-педагогической деятельности В. Я. Буняковского.

Среди 150 научных трудов Буняковского имеются работы: 1) по теории чисел, среди них теорема

$$\frac{a^{(p-1)q}-1}{p^n} = \text{целому числу},$$

где p — простое, a и n — любые целые числа, a не делится на p, $q = p^{n-1}$; работы о символах Лежандра и $[x]$; 2) по анализу, среди них работа 1859 г., где получено «неравенство Буняковского»

$$\left[\int_a^b \varphi(x)\,\psi(x)\,dx\right]^2 \leqslant \int_a^b \varphi^2(x)\,dx \cdot \int_a^b \psi^2(x)\,dx;$$

3) относящиеся к суммированию рядов; 4) по теории параллельных; 5) по прикладной теории вероятностей.

В связи с педагогической деятельностью (Кадетский и Морской корпусы, Институт инженеров путей сообщения, Петербургский университет, работа в комиссиях по составлению программ и конспектов для военных учебных заведений и пр.) Буняковским были составлены учебники и программы для учителей (по арифметике и геометрии).

В статье имеются некоторые неточности и вводящие в заблуждение описки: Клавдиус вместо Клавий, Коллингс вместо Коллинз; не указывается, что в работе Буняковского 1872 г. дается весьма объективное изложение основных идей Лобачевского. Преувеличением звучит заявление автора: «исследования Буняковского по теории чисел и теории вероятностей обусловили появление соответствующих классических работ П. Л. Чебышева и его учеников». *И. Я. Депман*

2061. Рене Госс умер за Францию (16 августа 1883 г.— 21 декабря 1943 г.). Фортра (René Gosse mort pour la France (16 août 1883, 21 décembre 1943). Fortrat René), Cahiers phys., 1954, № 50, 1—7 (франц.)

Памяти математика Рене Госса, активного участника движения сопротивления.

2062. Джино Лориа (1862—1954) — историк математики. Кампеделли (Gino Loria (1862—1954) storico della matematica. Campedelli Luigi), Illustr. scient., 1954, 6, № 55, 34—35 (итал.)

Краткий обзор жизни и научной деятельности итальянского историка математики Джино Лориа, родился 19 мая 1862 г. в Мантуе, умер 30 января 1954 г. в Генуе. В 1886—1936 гг. он был профессором кафедры высшей геометрии в Генуе. Основные работы Лориа относятся к геометрии и истории математики. К первым принадлежат: «Специальные плоские кривые» (Curve piane speciali, нем. изд. 1902,

1910—1911; итал. изд. 1930—1931), «Специальные кривые двоякой кривизны» (Curve sghembe speciali, 1925), «Прошедшее и настоящее основных геометрических теорий» (Il passato e il presente delle principali teorie geometriche, 2-е изд. 1897; 3-е изд. 1907; 4-е изд. 1931), «История начертательной геометрии» (La storia della geometria descrittiva, 1921) и ряд работ по начертательной геометрии. Ко вторым принадлежат: «Точные науки в древней Греции» (Le scienze esatte nell'antica Grecia, 1914), «История математики» (Storia delle matematiche, в трех томах, 1929, 1931, 1933, и в одном томе — 1950), публикация трудов Торричелли (1919), работы о Ньютоне (1920), Архимеде (1928) и ряд мелких работ, объединенных в «Scritti, conferenze, discorsi sulla storia delle matematiche», Cedam, 1936). С 1898 г. Джино Лориа издает журнал «Bolletino di bibliografia e storia delle science matematiche e fisiche» (продолжение прекратившегося в 1887 г. «Бюллетеня» Бонкомпаньи), выходящий и в настоящее время в виде библиографического отдела других журналов. В конце статьи дается сравнительная характеристика Лориа с другими итальянскими историками математики Федериго Энриквесом (1871—1946) и Этторе Бортолотти (1866—1947). *И. Н. Веселовский*

2063. Аристотл Майкал. Хайерс (Aristotle D. Michal (1899—1953). Hyers D. H.), Math. Mag., 1954, **27**, № 5, 237—244 (англ.)

Некролог профессора математики Калифорнийского технологического института Майкала (1899—1953). Приводится список опубликованных трудов.

2064. Математические труды Дмитрия Мириманова. Вандивер (Les travaux mathématiques de Dmitry Mirimanoff. Vandiver H. S.), Enseign. math., 1953, **39**, 169—179 (франц.)

2065. Анри Пуанкаре — универсальный ученый. Мартен (Henri Poincaré, savant universel. Martin Charles-Noël), Atomes, 1954, **9**, № 100, 243 (франц.)

К столетию со дня рождения А. Пуанкаре. См. также РЖМат, 1955, 575.

2066. Столетие со дня рождения А. Пуанкаре (1854—1912) (Stulecie urodzin H. Poincaré (1854—1912)), Postepy fiz., 1954, **5**, № 4, 502 (польск.)

2067. Сергей Павлович Фиников (К семидесятилетию со дня рождения). Лаптев Г., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3(61), 245—252

Краткие биографические сведения и очерк научной деятельности известного советского геометра С. П. Финикова. Приложен список печатных работ юбиляра.

2068 К. История математики. Т. 1. От начала до появления Ферма и Декарта. Гофман (Geschichte der Mathematik. T. 1. Von den Anfängen bis zum Auftreten von Fermat und Descartes. Hofmann J. E., 200 S. (Sammlung Göschen, Bd. 226), 1953, 2.40 DM), Neue techn. Bücher, 1954, **31**, Ausg. 3, 56 (библ.)

2069 К. Араго и его время. Одюбер (Arago et son temps. Audubert René, 23 pp. (Université de Paris. Les Conférences du Palais de la découverte. Série A, № 191, 19 décembre 1953), Alençon, imp. de Poulet-Malassis, 1954), Bibliogr. France, 1954, 143, № 21, ч. 1, 485 (библ.)

2070 К. Михаил Софронов — русский математик середины XVIII века. Смирнов В. И., Кулябко Е. С. 54 стр. с илл., М.-Л., Изд-во АН СССР, 1954, 2 р. 10 к.

На основании некоторых архивных материалов (см. также: Пекарский П., История Академии наук, т. 1, СПБ, 1870) описывается жизнь и деятельность Михаила Софронова (1729—1760). Приведены перевод письма Софронова к Леонарду Эйлеру от 1752 г., факсимиле первой страницы подлинника и перевод ответного письма Эйлера от 9 мая 1752 г. В качестве приложений приведены переводы (с латинского языка) двух неопубликованных до сих пор работ Софронова: «Рассуждение о применении непрерывных дробей для нахождения квадратных и биквадратных корней и т.д.» и «О спрямлении дуг эллипса», последний в сокращенном виде. *Г. К. Михайлов*

2071 РЕЦ. Историко-математические исследования. Под ред. **Рыбкина Г. Ф., Юшкевича А. П.,** вып. IV, 512 стр., 1951, 17 р. 90 к.; вып. V, 472 стр., 1952, 13 р. 75 к.; М.-Л., Гостехиздат [**Рецензия: Рогаченко В. Ф.,** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3(61), 267—273]

2072 Д. Вопросы обоснования математического анализа в XVIII и начале XIX вв. в России. Зотина Р. С. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. гор. пед. ин-т, М., 1954

2073 Д. Алгебра в русских университетах в XVIII—XIX вв. Галченкова Р. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1954

См. также: 2055.

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

2074. Об интуиционистском функциональном исчислении. Онисн (On intuitionistic functional calculus. Ohnishi Masao), Osaka Math. J., 1953, **5**, № 2, 203—209 (англ.)

Хейтинг (Heyting A., J. Symbolic Logic, 1946, **11**, № 4, 119—121) доказал, что в конструктивном исчислении предикатов имеют место формулы

$$\forall x F(x) \to \neg\neg\forall x F(x) \to \forall x \neg\neg F(x) \rightleftarrows \neg\neg\forall x \neg\neg F(x),$$
$$\exists x F(x) \to \exists x \neg\neg F(x) \to \neg\neg\exists x F(x) \rightleftarrows \neg\neg\exists x \neg\neg F(x),$$

записываемые автором короче как схемы

$$\forall \quad (+\,+) \to (-\,+) \to (+\,-) \rightleftarrows (-\,-),$$
$$\exists \quad (+\,+) \to (+\,-) \to (-\,+) \rightleftarrows (-\,-);$$

ослабление формулы или части формулы двойным отрицанием здесь отмечается минусом.

Если F зависит от двух (соответственно трех) аргументов, то добавлением кванторов отсюда выво-

дятся схемы:

$$\exists\forall\,(+++)\to(+-+)\begin{matrix}\nearrow\{\alpha;\ \beta\}\searrow\\ \searrow\{\gamma;\ \delta\}\nearrow\end{matrix}\begin{Bmatrix}(-++)\\ (---)\end{Bmatrix},$$

где α, β, γ, δ обозначают соответственно $(-++)$, $(--+)$, $(+--)$ и $(+-+)$;

$$\forall\exists\forall(++++)\begin{matrix}\nearrow(-+++)\to(-+-+)\to\{\alpha_1\}\searrow\\ \searrow(++-+)\to\ \{\beta_1\}\ \to\{\beta_2\}\nearrow\end{matrix}\{\gamma_1\},$$

где α_1 есть любая из эквивалентных $(+--+)$, $(---+)$, $(+---)$, $(----)$; β_1 — любая из эквивалентных $(+++-)$, $(++--)$; β_2 — любая из эквивалентных $(-++-)$, $(-+--)$ и γ_1 — любая из эквивалентных $(+--+-)$, $(---+-)$, $(+----)$, $(-----)$ (эквивалентные формулы объединены скобками { }). Приводятся сходные схемы для $\forall\exists$ и $\exists\forall\exists$.

Эти результаты используются во второй части заметки, посвященной конструктивной теории действительных чисел. То, что последовательность $\{a_r\}$ рациональных чисел является фундаментальной, т.е. определяет действительное число, записывается формулой

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n\,\forall r>n\,|a_r-a_n|<\varepsilon, \qquad (2.11)$$

где ε — рациональное, r и n — натуральные. Это формула типа $\forall\exists\forall$; согласно схеме она имеет семь неэквивалентных ослаблений. В силу того известного факта, что неравенство рациональных чисел конструктивно эквивалентно своему двойному отрицанию, остается только три неэквивалентных типа формул: (2.11) и

$$\neg\neg\forall\varepsilon>0\,\exists n\forall r>n\,|a_r-a_n|<\varepsilon, \qquad (2.12)$$

$$\forall\varepsilon>0\,\neg\neg\exists n\forall r>n\,|a_r-a_n|<\varepsilon. \qquad (2.13)$$

Из $\forall\exists\forall$-схемы следует, что (2.11) → (2.12) → (2.13).

Два действительных числа, определяемых последовательностями $\{a_r\}$ и $\{b_r\}$, называются равными, если

$$\forall\varepsilon>0\,\exists n\forall r>n\,|a_r-b_r|<\varepsilon,$$

и неравными, если

$$\exists\varepsilon>0\,\forall n\exists r>n\,|a_r-b_r|\geqslant\varepsilon;$$

первое утверждение имеет два неэквивалентных ослабления, второе — четыре. Исследуется зависимость между этими утверждениями или их отрицаниями.

В частности, для (2.11)-чисел все три определения равенства оказываются равносильными; из пяти определений неравенства три, соответственно два, определения равносильны между собою. Эти понятия сравниваются с терминологией Брауэра (Brouwer L. E.J., Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1925, **33**, 251—256).

В. К. Детловс

2075. Разрешимые и неразрешимые проблемы. Тьюринг (Solvable and unsolvable problems. Turing A. M.), Sci. News, 1954, № 31, 7—23 (англ.)

Популярное изложение основ теории алгоритмов. После разбора некоторых примеров излагается общая концепция алгоритма в терминах, близких к «продукциям» Поста и нормальным алгорифмам А. А. Маркова. Приводится обычного типа доказательство невозможности алгоритма, распознающего неприменимость любого алгоритма к слову, его изображающему. (Аналогичное доказательство см. Марков А. А., Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1951, **38**, 176—189.)

Без доказательства проведены известные формулировки некоторых алгоритмически неразрешимых проблем. Подчеркивается важность результата П. С. Новикова об алгоритмической неразрешимости проблемы тождества теории групп.

Приводится также формулировка одного результата А. А. Маркова (Докл. АН СССР, 1951, 78, 1089—1092). *Б. А. Трахтенброт*

2076. Пример класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений, не имеющего алгорифма разрешимости для проблем о существовании. Яськовский С., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 4, 153—155

Пусть $\psi(a,b)=\frac{1}{2}(a+b)(a+b+1)+b+1$. Функция $f(a_1,\ldots,a_n)$ называется ψ-суперпозицией тогда и только тогда, когда $f(a_1,\ldots,a_n)$ может быть записана при помощи всех или некоторых из знаков: ψ, $a_1,\ldots,a_n$.

Через A обозначается некоторое подмножество множества N всех натуральных чисел; при этом полагается $A^1=A$ и $A^{-1}=N-A$. Пусть $\{\varepsilon_{i,j}\}$ — конечная двойная последовательность чисел $\varepsilon_{i,j}=\pm1$ $(1\leqslant i\leqslant h,\ 1\leqslant j\leqslant k)$ и пусть $f_1(a_1,\ldots,a_n),\ldots,f_k(a_1,\ldots,a_n)$ — произвольные ψ-суперпозиции.

Проблемой Пэписа (Pepis J., Fundam. math., 1938, **30**, 153), определенной числами $(\varepsilon_{i,j})$ и ψ-суперпозициями $f_1,\ldots,f_k$, называется вопрос:

(P) Для всякого ли подмножества A множества N существуют такие $a_1,\ldots,a_n\in N$ и такой индекс i $(1\leqslant i\leqslant h)$, что для всех $j=1,\ldots,k$ имеем $f_j(a_1,\ldots,a_n)\in A^{\varepsilon_{ij}}$?

Из работы Пэписа следует, что проблема разрешимости класса пэписовских проблем эквивалентна проблеме разрешимости исчисления предикатов. Поэтому класс проблем Пэписа не имеет алгорифма разрешимости.

Строится система обыкновенных дифференциальных уравнений с некоторым начальным условием. Утверждается, что проблема (P) эквивалентна следующей проблеме:

(D) Для всякого ли значения аргумента θ из интервала $(-1,1)$ построенная система уравнений имеет действительное решение в интервале $(-1,1)$, удовлетворяющее начальному условию?

Неразрешимость класса проблем (P) влечет неразрешимость класса проблем (D). *В. К. Детловс*

2077. Булево представление через исчисление высказываний. Хенкин (Boolean representation through propositional calculus. Henkin L.), Fundam. math., 1954, **41**, № 1, 89—96 (англ.)

Теорема о булевом представлении утверждает, что каждая булева алгебра изоморфна булевой алгебре множеств. Все существующие доказательства этой теоремы опираются на аксиому выбора.

Пропозициональная теорема Гёделя — Мальцева утверждает, что каждое формально непротиворечивое множество формул исчисления высказываний одновременно выполнимо. Доказательство этой тео-

ремы во всей общности (для исчисления с несчетным множеством символов) тоже требует пока аксиомы выбора.

Автор показывает, что оба эти столь далекие на первый взгляд предложения эквивалентны, причем доказательство их эквивалентности не требует аксиомы выбора. Доказательство второй теоремы при условии выполнения первой получается небольшим изменением аргументации Расёвой и Сикорского (Rasiowa H., Sikorski R., Fundam. math., 1951, 38, 230—232) и поэтому изложено кратко.

Автор дает два критерия возможности того, что при булевом представлении мощность единичного элемента представляющей алгебры множеств меньше мощности представляемой булевой алгебры A.

Первый критерий опирается на свойство конечного пересечения. Множество M элементов булевой алгебры B обладает свойством конечного пересечения, если произведение любого конечного числа элементов из M отлично от $0 \in B$. Критерий состоит в существовании класса U, удовлетворяющего условиям:

1) каждый элемент класса U является подмножеством A со свойством конечного пересечения;

2) каждый элемент A, отличный от 0, входит хоть в один элемент U;

3) мощность U меньше мощности A.

Автор дает доказательство этого критерия, опирающееся на пропозициональную теорему Гёделя — Мальцева и на аксиому выбора.

Он указывает (без доказательства) второй критерий, не требующий этих двух предложений, но замечает, что доказательство эквивалентности двух критериев снова нуждается в аксиоме выбора.

В статье имеются опечатки. *Ю. А. Шиханович*

2078. Об истинности и множественном обозначении. Мартин (On truth and multiple denotation. Martin R. M.), J. Symbolic Logic, 1953, **18**, № 1, 11—18 (англ.)

Множественное обозначение (multiple denotation) — это отношение между именем и элементами какого-нибудь класса. Автор показывает, что если две аксиомы этого отношения присоединить к синтаксису таких формальных систем, как теория множеств Цермело или теория типов, то понятие истины станет выразимым, причем для каждой формулы a и ее синтаксического описания α в метасистеме будет доказуема формула $T(\alpha) \equiv a$, где T означает металогический предикат истинности. Расширенную таким образом метасистему автор называет семантическим метаязыком. Одна из двух упомянутых выше аксиом есть '$\vdash$'$(x)(a$ Den $x . \equiv . - - - x - - -)$', где вместо '$a$' следует подставить синтаксическое описание абстракта '$x \ni (- - - x - - -)$'a ('a Den x' стоит вместо: «a является множественным обозначением для x»). Другая — выражает то обстоятельство, что множественные обозначения являются определенными постоянными предикатами системы. '$(a$ Sub $b)$' означает '$(x)(a$ Den $x . \supset . b$ Den $x)$'. Истинность формулы вида '$(x)(- - - x - - -)$' означает, что существует a такое, что $(x)(a$ Den $x)$, и существует b такое, что b Den $x \ni (- - - x - - -)$, причем a Sub b. Здесь $(- - - x - - -)$ — элементарная формула системы с одной свободной переменной, а $x \ni (- - - x - - -)$ — соответствующий ей абстракт. Далее понятие истинности определяется обычным путем.

Указывается, что этот метод построения семантики пригоден для замены классов трансфинитного порядка, которыми пользуется Тарский для теории типов (Tarski A., Studia Philos., 1936, 1, 261—405), или аксиомы о существовании надлежащей модели, которую Тарский использует для семантики теории множеств (Tarski A., J. Symbolic Logic, 1939, 4, 105—112). Отмечается, что этот метод также нуждается в обосновании. *А. С. Есенин-Вольпин*

2079. Полная независимость. Дрезден (Complete independence. Dresden Arnold), Scripta math., 1953, **19**, № 2—3, 205—206 (англ.)

Мур ввел понятие полной независимости m свойств $P_1, P_2, \ldots, P_m$ (Moore E. H., Introduction to a form of general analysis. New Haven Colloquium, 1910, p. 81).

Обычная независимость требует существования m систем S_i, $i = 1, \ldots, m$, каждая из которых имеет $m - 1$ свойство (m свойств, исключая P_i).

Полная независимость требует существования систем, в которых отсутствуют любые k свойств, $k = 1, \ldots, m$. Автор статьи обращает внимание на важность этого понятия.

Приводится пример свойств, не обладающих обычной, а следовательно, и полной независимостью, а также пример совместных независимых свойств, но не обладающих свойством полной независимости.

Т. Л. Майстрова

См. также: 2055.

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

2080. Об одном результате А. Вальфиша. Прахар (Über ein Resultat von A. Walfisz. Prachar K.), Monatsh. Math., 1954, **58**, № 2, 114—116 (нем.)

А. З. Вальфиш доказал (РЖМат, 1954, 1543) теорему:

Пусть $\rho(x)$ — число всех простых $p \leqslant x$, для которых каждое q, удовлетворяющее условию

$$|q - p| \leqslant \frac{\log p}{(\log\log\log p)^2}, \qquad (1)$$

не является простым. Тогда $\rho(x) \sim \frac{x}{\log x}$. Автор, применяя как и А. Вальфиш, лемму Бруна — Шнирельмана, показывает, что величина $(\log\log\log p)^2$ в неравенстве (1) может быть заменена произвольной функцией $f(p)$, неограниченно возрастающей вместе с p.

Доказывается, что при надлежащем $\delta > 0$ число простых $p \leqslant x$, для которых каждое q, удовлетворяющее условию $|q - p| < \delta \log x$, не является простым, больше чем $cx(\log x)^{-1}$ (c зависит от δ).

Следует отметить, что Ричи получил более общий и более точный результат (Ricci G., Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1953, 7, 133—151).

Г. А. Ломадзе

2081. О функциях, представляющих простые числа. Райт (A class of representing functions. Wright E. M.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 1, № 113, 63—71 (англ.)

Милс доказал (Mills W.H., Bull. Amer. Math. Soc., 1947, 53, 604) существование такого вещественного α, что $[\alpha^{3^n}]$ — простое число для каждого целого положительного n. Недавно автор доказал (Amer. Math. Monthly, 1951, 58, 617—618) существование такого α, что

$$\left[2^{2^{2^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2^{\alpha}}}}}}}\right]$$

всегда простое число. Нивен заметил (Niven I., Proc. Amer. Math. Soc., 1951, **2**, 753—755), что в каждом из этих случаев имеется по крайней мере счетное множество таких α. В реферируемой заметке автор показывает, что в каждом из этих случаев множество возможных α обладает следующими свойствами: 1) имеет мощность континуума, 2) нигде не плотно, 3) имеет меру нуль.

Эти три утверждения получаются как следствия некоторых общих теорем о функциях, представляющих простые числа.

Библиография, 7 названий.

И. И. Пятецкий-Шапиро

2082. К решению Линника проблемы Варинга. Оценка g(n). Ригер (Zu Linniks Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$. Rieger G. J.), Math. Z., 1954, **60**, № 2, 213—234 (нем.)

Рассматривая элементарное решение Ю. В. Линника проблемы Варинга (Линник Ю. В., Матем. сб., 1943, **12** (**54**), № 2, 225—230), автор показывает, что это решение позволяет элементарными средствами оценить порядок $g(n)$, именно устанавливается неравенство

$$g(n) < 2^{2\cdot 16^n (n+1)!}.$$

Примечание референта. 1. Говоря о современной оценке $g(n)$, полученной аналитическими средствами, автор не приводит известной оценки И. М. Виноградова. 2. Автор постоянно ссылается не на упомянутую выше работу Ю. В. Линника, а на ее популярное изложение в книге А. Я. Хинчина «Три жемчужины теории чисел». 3. Указание на возможность элементарного решения проблемы Гильберта — Камке показывает, что автор не знаком с работой референта (Уч. зап. ЛГУ, 1950, № 137, 27—38). *Г. В. Емельянов*

2083. Теория Ферми образования π-мезонов и аддитивная теория чисел. Аулук, Котхари (Fermi's theory of the generation of pions and the partition theory of numbers. Auluck F. C., Kothari D. S.), Progr. Theoret. Phys., 1954, **11**, № 1, 120—121 (англ.)

Пусть $p_k(n)$ — число представлений натурального n в виде суммы k натуральных слагаемых: $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$; k_0 — значение k, для которого $p_k(n)$ максимально. Приводится асимптотическое выражение k_0, полученное Секерешем (РЖМат, 1954, 2839):

$$k_0 = \left(\frac{6n}{\pi^2}\right)^{1/2} L + \frac{9}{\pi^2}\left(1 + L - \frac{1}{6}L^2\right) - \frac{1}{2} + O\left(n^{-1/2}\log^4 n\right),$$

где $L = \log (6n/\pi^2)^{1/2}$, и аналогичный неопубликованный результат Аулука относительно среднего значения k, определяемого равенством

$$\bar{k} = \sum_{k=1}^{n} k p_k(n) \Big/ \sum_{k=1}^{n} p_k(n).$$

Далее рассматриваются ядерные столкновения с большой энергией. Пусть в соответствующей системе координат W — выделяемая при столкновении энергия, идущая на образование π-мезонов, μ — масса π-мезона в покое, а $\nu = W/\mu$. Тогда, считая, что статистическая проблема возникновения π-мезонов эквивалентна разбиению числа ν на натуральные слагаемые, авторы заключают, что наиболее вероятное число возникающих π-мезонов равно числу k, для которого $p_k(\nu)$ максимально. Получающиеся при этом значения N (для приемлемых значений ν) удовлетворительно согласуются с данными теории Ферми.

Г. В. Емельянов

2084. О целых числах, имеющих многочисленные представления в виде суммы двух простых чисел. Прахар (On integers having many representations as a sum of two primes. Prachar K.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 3, 347—350 (англ.)

Пусть n — целое четное число; $f(n)$ — число решений уравнения $p + \bar{p} = n$, где p, $\bar{p}$ — простые числа; c_1, c_2, c_3 — положительные постоянные.

Утверждается, что существует бесконечное множество чисел n, для которых

$$f(n) > c_1 \frac{n}{\ln^2 n} \ln\ln n.$$

Доказательство этого факта может быть получено посредством метода, предложенного Эрдёшем (Erdös P., J. London Math. Soc., 1937, **12**, 133).

Доказывается, что среди $n \leqslant x$, где x — достаточно большое положительное число, имеется более чем $\exp(c_2\sqrt{\ln n})$ чисел, для которых $f(n) > c_3 \frac{x}{\ln^2 x} \times \ln\ln x$. Здесь используется оценка для функции $\pi(x; k, l)$ (число простых $p \leqslant x$, $p \equiv l \pmod k$), $(k, l) = 1$), принадлежащая Титчмаршу (Titchmarsh E. C., Rend. Circolo mat. Palermo, 1930, **57**, 414; 1933, **57**, 478).

И. Г. Мельников

2085. Об одной теореме существования в теории алгебраических чисел. Шафаревич И. Р., Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, **18**, № 4, 327—334

Пусть K/k — нормальное поле с группой Галуа F, l — простое число такое, что первообразный корень ζ степени l из 1 содержится в K, причем $\zeta^u = \zeta^{g(u)}$, $u \in F$, $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ — дивизоры K, взаимно простые друг с другом и с l.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_r$ — любые корни степени l из 1, $\zeta(u)$ — функция, определенная на F, со значениями в группе корней степени l из 1, удовлетворяющая условию $\zeta(u^{-1}) = \zeta(u)^{g(u)}$.

При $l = 2$ пусть выполнены еще следующие дополнительные условия: 1) $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_r$ взаимно просты

с дискриминантом K/k. 2) Все простые делители числа 2 в k полностью распадаются в K. 3) Вещественные бесконечно удаленные простые дивизоры k остаются вещественными в K. 4) Если u_i — инволютивные автоморфизмы, K_{u_i} — принадлежащие им подполя и $\mathfrak{D}_{u_i}$ — дифференты K/K_{u_i}, то из того, что $\mathfrak{D}_{u_1}\dots\mathfrak{D}_{u_m}$ есть квадрат дивизора K, следует, что $\zeta(u_1)\dots\zeta(u_m)=1$.

Тогда существует бесконечное множество чисел α поля K, удовлетворяющих условиям: 1) символы Лежандра

$$\left(\frac{\alpha}{q_i}\right)=\xi_i \qquad (i=1,\dots,r),$$

2) для всех простых $\mathfrak{p}\mid\alpha$ и $u\in F$, $u\neq 1$, причем $\mathfrak{p}^u$ не делит α,

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{p}^u}\right)=\zeta(u).$$

Эта теорема играет важную роль при построении полей с разрешимой группой Галуа. *И. П. Кубилюс*

2086. Об одной асимптотической формуле в алгебре. Уразбаев Б. М., Докл. АН СССР, 1954, 95, № 5, 935—938

Доказывается, что число $N_l(x)$ циклических полей простой степени l, дискриминанты которых не превосходят x^{l-1}, выражается асимптотической формулой

$$N_l(x)=\lambda x+O\left(x^{1-\frac{1}{l-1}+\varepsilon}\right),$$

где $\lambda\neq 0$ — постоянная, зависящая от l, ε — произвольное число >0.

Метод доказательства обычный аналитический. В работе имеется необоснованное утверждение о регулярности функции $f(s)$ во всей плоскости, кроме $s=1$, что, впрочем, не влияет на ход рассуждения. Прежняя работа автора (Изв. АН Казах. ССР, сер. астроном., физ., матем. и механ., 1951, 5, № 62, 37—52), посвященная оценке $N_l(x)$, исходя из геометрических соображений, содержит существенный пробел и даже неверное утверждение.

Библиография, 7 названий.

Примечание референта. Сноска: «другой вариант доказательства с остаточным членом

$$O\left(x^{1-\frac{1}{2(l-1)}+\varepsilon}\right)$$

получен А. Г. Постниковым», не соответствует действительности. *А. Г. Постников*

2087. Об общей проблеме делителей в полях алгебраических чисел. Исеки (On a general divisor problem in algebraic number fields. Iseki Kanesiroo), Natural Sci. Rept Ochan. Univ., 1953, 4, № 1, 1—21 (англ.)

Изучение рядов Дирихле, коэффициенты которых выражают число делителей натуральных чисел или целых идеалов числового поля, приводит к асимптотической формуле для роста сумматорной функции коэффициентов таких рядов (проблема делителей).

В работе рассматривается ряд Дирихле

$$Z(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^s} \qquad (\sigma>1),$$

который по построению является произведением дзета-функций Дедекинда $\zeta_j(s)$ алгебраических полей k_j степени n_j $(j=1,2,\dots,\tau)$, $N=n_1+n_2+\dots+n_\tau$. Из функционального уравнения Гекке для этих функций следует

$$Z(s)=g(s)\,Z(1-s),$$

где

$$g(s)=\left(\frac{(2\pi)^s}{\pi}\right)^N d^{1/2-s}\left(\sin\frac{\pi s}{2}\right)^{\gamma+1}\times$$

$$\times\left(\cos\frac{\pi s}{2}\right)^{N-r-1}\Gamma^N(1-s),$$

$$n_j=r_1^{(j)}+2r_2^{(j)},\quad d=d_1d_2\dots d_\tau,$$

$$r=(r_1^{(1)}+r_2^{(1)})+\dots+(r_1^{(\tau)}+r_2^{(\tau)})-1,$$

d_j — абсолютное значение дискриминанта поля k_j.

Основной результат работы состоит в следующем. Пусть

$$\nu=\left[\frac{N}{2}\right]+1,\quad \lambda=\left[\frac{N+1}{2}\right]=N+1-\nu.$$

Тогда при любых $x>0$, $y>0$ справедливо соотношение

$$\sum_{n\leqslant y}\frac{F(n)}{n^\lambda}K^{(\nu)}(nx)=Q_{\lambda-1}(x)-$$

$$-\int_y^\infty S^{(N+1)}(z)\,\frac{K^{(\nu)}(xz)}{z^\lambda}\,dz+$$

$$+\sum_{l=0}^{\lambda}(-1)^l Q_l(y)\,\frac{\partial^l}{\partial y^l}\,\frac{K^{(\nu)}(xy)}{y^\lambda}+ \qquad (1)$$

$$+(-1)^\lambda\int_y^\infty Q_\lambda(z)\,\frac{\partial^{\lambda+1}}{\partial z^{\lambda+1}}\,\frac{K^{(\nu)}(xz)}{z^\lambda}\,dz,$$

где

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(7/4)}g(s)\,\frac{w^{s+N}}{s(s+1)\dots(s+N)}\,ds=R(w)+K(w),$$

$$K(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{(-1/4N)}g(s)\,\frac{w^{s+N}}{s(s+1)\dots(s+N)}\,ds,$$

$R(w)=w^{N+1}(A_0\log^r w+\dots+A_r)$ — вычет подинтегральной функции в полюсе $s=1$ порядка $r+1$,

$$S(y)=\operatorname*{Res}_{s=1}\left(Z(s)\,\frac{y^{s+N}}{s(s+1)\dots(s+N)}\right)=$$

$$=y^{N+1}(B_0\log^{\tau-1}y+\dots+B_{\tau-1}),$$

$$H_k(y)=\int_0^y dy_1\int_0^{y_1}dy_2\dots\int_0^{y_{k-1}}H(y_k)\,dy_k=$$

$$= \sum_{n \leqslant y} F(n) \frac{(y-n)^k}{k!},$$

$$H(y) = \sum_{n \leqslant y} F(n),\ Q_k(y) = H_k(y) -$$

$$- S^{(N-k)}(y) - \frac{y^k}{k!} Z(0),\ 0 \leqslant k \leqslant N,$$

$A_0, \ldots, A_\tau$, $B_0, \ldots, B_{\tau-1}$ — постоянные, зависящие от структуры рассматриваемых полей.

Соотношение (1) дает обобщение известного тождества Харди — Ландау (Hardy G. H., Landau E., Proc. Roy. Soc., 1924, A105, 244—258), а также результатов Хассе — Суетуна по общей проблеме делителей в теории идеалов (Hasse H., Suetuna Z., J. Fac. Sci., Imperial Univ. Tokyo, 1931, 2, 131—154). Другой результат реферируемой работы является обобщением тождества Харди (Hardy G. H., Quart. J. Math., 1915, 46, 263—283), который следует из (1) при $y \to \infty$ и более точной оценки $Q_k(y)$, получаемой методом Харди — Литлвуда (Hardy G. H., Littlewood J. E., Proc. London Math. Soc., 1922, 21, 39—74).

Библиография, 10 названий. *Б. М. Уразбаев*

2088. О трансцендентности и алгебраической независимости значений целых функций некоторых классов. Шидловский А. Б., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 4, 697—700

Целая функция $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n / n!$ называется E-функцией, если: 1) все числа c_n принадлежат алгебраическому полю K конечной степени; 2) модули чисел c_n и всех их сопряженных растут медленнее $n^{n\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$; 3) существуют натуральные числа $q_n = O(n^{n\varepsilon})$ такие, что $q_n c_k$, $k = 0, 1, \ldots, n$, — целые алгебраические числа. Система E-функций $f_1(z)$, $f_2(z), \ldots, f_m(z)$, являющихся решением системы дифференциальных уравнений

$$y_k' = \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}(z)\, y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, m, \qquad (1)$$

коэффициенты которых $Q_{k,i}(z)$ — рациональные функции от z с алгебраическими числовыми коэффициентами, называется неприводимой, если ни одна из этих функций не равна нулю тождественно и соотношение $\sum_{k=1}^{m} P_k(z)\, y_k = 0$, где $P_k(z)$ — многочлены, а $y_1, \ldots, y_m$ — какое-либо решение системы (1), возможно лишь в случае, когда все произведения

$$P_k(z)\, y_k \equiv 0,\ 1 \leqslant k \leqslant m.$$

Основная теорема. Пусть система E-функций $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$y_k' = Q_{k,0}(z) + \sum_{i=1}^{m} Q_{k,i}(z)\, y_i, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

коэффициенты которых $Q_{k,i}(z)$ — рациональные функции от z с алгебраическими коэффициентами, а $\mu_N = (m+N)!/m!N!$ произведений степеней функций

$$f_1(z), \ldots, f_m(z), f_1^{k_1}(z) \ldots f_m^{k_m}(z),$$
$$k_i \geqslant 0,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ k_1 + \ldots + k_m \leqslant N,$$

при любом $N = 1, 2, \ldots$ образуют неприводимую систему E-функций. Тогда для любого алгебраического значения α, отличного от нуля и полюсов всех функций $Q_{k,i}(z)$, m чисел $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ алгебраически независимы.

Эта теорема является усилением теоремы Зигеля (Гельфонд А. О., Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952, стр. 100). Приводятся также без доказательства еще семь теорем, получающихся из основной теоремы применением ее к конкретным E-функциям. *Н. И. Фельдман*

2089. Одна характеристика квадратичных вычетов. Келли (A characteristic property of quadratic residues. Kelly John B.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 38—46 (англ.)

Пусть p — нечетное простое число. Через R_p и N_p обозначаются множества квадратичных вычетов и невычетов $\bmod p$, расположенных между 1 и $p-1$, через r и n — элементы R_p и N_p. Под $a + B$ подразумевается множество чисел $a + b$, $b \in B$. Как легко доказать, если $p \equiv 1 \pmod 4$, то каждое множество $n + R_p$ и $r + N_p$ состоит из $(p-1)/4$ квадратичных вычетов и $(p-1)/4$ невычетов, а если $p \equiv 3 \pmod 4$, то из нуля, $(p-3)/4$ вычетов и $(p-3)/4$ невычетов. Доказывается, что если $m \equiv 1 \pmod 4$ и все вычеты $\bmod m$, расположенные между 1 и $m-1$, разбиты на две части A и B по $(m-1)/2$ чисел в каждой так, что для любого $a \in A$ и $b \in B$ $a + B$ и $b + A$ состоит из $(m-1)/4$ чисел A и $(m-1)/4$ чисел B, то m просто, и мы имеем разбиение на квадратичные вычеты и невычеты $\bmod m$. Аналогичное утверждение имеет место при $m \equiv 3 \pmod 4$. Строится пример, показывающий, что аналогичное утверждение для конечных полей неверно. *И. Р. Шафаревич*

2090. Заметка об иррегулярных простых числах. Карлиц (Note on irregular primes. Carlitz L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 2, 329—331 (англ.)

Пусть $p > 2$ — простое целое рациональное число и $B_2, B_4, B_6, \ldots$ обозначают числа Бернулли. p называется иррегулярным, если $B_2 B_4 \ldots B_{p-3} \equiv 0 \pmod p$.

Приводится упрощенное доказательство бесконечности числа иррегулярных простых чисел. Если предположить конечность числа иррегулярных простых

$$p_1, p_2, \ldots, p_k, \qquad (1)$$

то, рассматривая соотношения

$$\frac{B_M}{M} = \frac{N_M}{D_M} > 1, \qquad (N_M, D_M) = 1,$$

$$M = 2t \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1)$$

и имея в виду известные сравнения для чисел Бернулли:

$$B_m \equiv 0\ (p^r),\ \text{если}\ m \equiv 0\ (p^r), \quad m \not\equiv 0\ (p-1);$$
$$pB_m \equiv -1\ (p),\ \text{если}\ m \equiv 0\ (p-1);$$
$$\frac{B_{m+r(p-1)}}{m+r(p-1)} \equiv \frac{B_m}{m}\ (p),\ \text{если}\ m \not\equiv 0\ (p-1) \quad (2)$$

легко получить:

$$\frac{B_M}{M} \not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k),$$

$N_M \left| \frac{B_M}{M} \right.$, $p_M \mid N_M$, p_M — простое число, отличное от (1), $M \not\equiv 0\ (p_M - 1)$ и из (2) следует

$$B_s \equiv 0\ (p_M) \quad (0 < s < p_M - 1).$$

Следовательно, p_M — иррегулярное простое, не вошедшее в (1).

Аналогичная теорема доказывается для чисел Эйлера. Библиография, 5 названий. *П. Н. Реморов*

2091. Критерий иррациональности для некоторых классов чисел. Оппенгейм (Criteria for irrationality of certain classes of numbers. Oppenheim A.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 4, 235—241 (англ.)

Несложными рассуждениями устанавливается ряд критериев иррациональности чисел вида $x = a_0 + a_1/b_1 + a_2/b_1b_2 + a_3/b_1b_2b_3 + \ldots$, где a_i — целые числа, а b_i — целые положительные числа. В качестве примеров доказывается иррациональность чисел

$$\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n d(n)/n!, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \varphi(n)/n!, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \sigma(n)/n!,$$

где $d(n)$ — число делителей n, $\varphi(n)$ — функция Эйлера, $\sigma(n)$ — сумма делителей n, а $\varepsilon_n = \pm 1$. Доказана также иррациональность чисел вида $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n/r^n(n!)^b$, где $r \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, a_n — целые числа, причем $|a_n| \leqslant rn^b - 1$ для $n \geqslant n_0$, и бесконечно много раз a_n отлично от чисел 0 и $\pm(rn^b - 1)$.

Замечена опечатка: сравнение (10) нужно заменить сравнением $b_1b_2 \ldots b_{i-1}x \equiv x_i\ (\mathrm{mod}\ 1)$.

Имеется замечание редакции о том, что заметка Кламкина (M. S. Klamkin), содержавшая некоторые из результатов реферируемой статьи, была получена редакцией раньше. *Н. И. Фельдман*

2092. Неоднородные минимумы комплексных кубических нормальных форм. Суиннертон — Дайер (The inhomogeneous minima of complex cubic norm forms. Swinnerton — Dyer H. P. P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 2, 209—219 (англ.)

Пусть K_1, K_2, K_3 обозначают алгебраически сопряженные кубические поля алгебраических чисел, а ω_{i1}, ω_{i2}, ω_{i3} $(i = 1, 2, 3)$ — базис группы целых чисел поля K_i. Пусть далее $\xi_i = \omega_{i1}x_1 + \omega_{i_2}x_2 + \omega_{i3}x_3$ $(i = 1, 2, 3)$, $M(K; x_1', x_2', x_3') = \min |\xi_1\xi_2\xi_3|$, где $(x_1, x_2, x_3) \equiv (x_1', x_2', x_3')\ (\mathrm{mod}\ 1)$,

$$M(K) = \max M(K; x_1', x_2', x_3'), \quad 0 \leqslant x_i' < 1,$$

d — общий дискриминант полей K_i.

Доказывается, что при $|d| > 1237$

$$M(K) < \frac{|d|^{3/8}}{16\sqrt[3]{2}}$$

и что эта оценка является в некотором смысле наилучшей. Исследование, выполненное автором, является развитием одного результата Давенпорта (РЖМат, 1953, 558). *П. Г. Когония*

2093. Решетчатые покрытия четырехмерными сферами. Бамба (Lattice coverings with four-dimensional spheres. Bambah R. P.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 2, 203—208 (англ.)

Пусть J_n — n-мерная сфера объема $V(J_n)$; Λ — решетка определителя $d(\Lambda)$ такая, что каждая точка пространства R_n лежит по меньшей мере в одной из сфер, получающихся из J_n переносами на векторы решетки Λ. Тогда Λ называется покрывающей решеткой для J_n, а $V(J_n)/d(\Lambda)$ — плотностью покрытия. Точная нижняя граница θ_n плотности $V(J_n)/d(\Lambda)$, взятая по всем покрывающим решеткам Λ для J_n, называется плотностью редчайшего решетчатого покрытия сферами J_n (доказано (Hlawka E., Monatsh. Math., 1949, **53**, 81—131), что покрытие с плотностью θ_n действительно существует). Известно (Bambah R. P., Davenport H., J. London Math. Soc., 1952, **27**, 224—229; Davenport H., Circolo mat. Palermo, 1952, **1**, сер. 2, 1—16), что

$$4/3 - o(n) < \theta_n < (1{,}15)^n. \quad (1)$$

Точные значения θ_n известны лишь для $n = 2$ и 3: $\theta_2 = 2\pi/3\sqrt{3}$, $\theta_3 = 5\sqrt{5}\pi/24$ (первый результат известен давно; второй см. Bambah R. P., Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, **20**, 25—52).

Доказывается, что

$$4\pi^2/15\sqrt{3} \leqslant \theta_4 \leqslant 2\pi^2/5\sqrt{5}, \quad (2)$$

причем предполагается, что $\theta_4 = 2\pi^2/5\sqrt{5}$. Неравенства (2) равносильны следующей теореме о квадратичных формах: Пусть $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — положительная (определенная) квадратичная форма с вещественными коэффициентами и определителем D; тогда существуют такие вещественные числа u_1^0, u_2^0, u_3^0, u_4^0, что для всех целых x_1, x_2, x_3, x_4:

$$f(x_1 + u_1^0,\ x_2 + u_2^0,\ x_3 + u_3^0,\ x_4 + u_4^0) \geqslant (64D/675)^{1/4}; \quad (3)$$

с другой стороны, найдется форма f_0, для которой при любых вещественных числах u_1, u_2, u_3, u_4 можно найти такие целые числа x_1, x_2, x_3, x_4, что

$$f_0(x_1 + u_1,\ x_2 + u_2,\ x_3 + u_3,\ x_4 + u_4) \leqslant \leqslant (16D/125)^{1/4}. \quad (4)$$

Именно неравенства (3), (4) и доказываются. При этом используются, в частности, исследования Вороного о параллелоэдрах (Voronoi G., J. reine und angew. Math., 1908, **134**, 198—287).

Библиография, 6 названий. *А. В. Малышев*

2094. О взаимно полярных выпуклых областях. Бамба (On polar reciprocal convex domains. Bambah R. P.), Proc. Nat. Inst. Sci. India, 1954, **20**, № 1, 119—120 (англ.)

Пусть k и K — симметричные выпуклые области на плоскости с центрами в начале координат, причем k и K взаимно полярны относительно единичного круга C с центром в начале. $\Delta(K)$ — критический детерминант для K, $c(k)$ — постоянная покрытия для k, т. е. верхняя грань детерминантов покрывающих решеток для k.

Малер доказал неравенство (Mahler K., Proc. Koninkl nederl. akad. wetensch., 1948, **A51**, 482—485)

$$1/2 \leqslant \Delta(K)\,\Delta(k) \leqslant 3/4. \qquad (1)$$

Используя неравенство (1), автор доказывает, что $2 \leqslant \Delta(K)\,c(k) \leqslant 9/4$. Даны примеры областей, для которых $\Delta(K)\,c(k) = 2$, $\Delta(K)\,c(k) = 9/4$. Указывается, что аналогичные неравенства могут быть получены для тел, расположенных в n-мерном пространстве. *Э. Е. Симакова*

2095. Квадратичные формы над конечными полями. Карлиц (A problem involving quadratic forms in a finite field. Carlitz L.), Math. Nachr., 1954, **11**, № 3, 135—142 (англ.)

Пусть $q = p^n$, $p > 2$. $GF(q)$ — конечное поле Галуа, состоящее из q элементов. $A = (\alpha_{ij})$ означает симметрическую матрицу порядка m, с отличным от нуля определителем. Рассмотрим уравнение

$$\begin{vmatrix} A & X \\ X' & 0 \end{vmatrix} = \beta,$$

где β — число из поля $GF(q)$ и X — матрица размеров $m \times t$. Обозначим число решений этого уравнения через $N_t(\beta)$. Без ограничения общности можно предполагать, что $t \leqslant m$.

В статье вычислено $N_t(\beta)$. Число решений вычислено также для некоторых аналогичных уравнений, например

$$X'AX = B.$$

Библиография, 5 названий.

И. И. Пятецкий-Шапиро

2096. Кольца арифметических функций. II. Число решений квадратичного сравнения. Коэн (Rings of arithmetic functions. II. The number of solutions of quadratic congruences. Cohen Eckford), Duke Math. J., 1954, **21**, № 1, 9—28 (англ.)

Пусть r — нечетное натуральное число, $a_1, \ldots, a_s, n$ — целые рациональные числа, причем $a_1, \ldots, a_s$ взаимно просты с r. Получены явные выражения для числа решений $N_s(n, r)$ сравнения $a_1x_1^2 + \ldots + a_sx_s^2 \equiv n \pmod r$. Ввиду громоздкости (особенно при нечетном s) они в реферате не приводятся. В более общем виде — для аналогичных сравнений в любом поле алгебраических чисел — формулы числа решений были опубликованы автором ранее (РЖМат, 1954, 5045). В настоящей работе для частного случая поля рациональных чисел дается другое доказательство.

При выводе используются так называемые арифметические функции, т. е. такие функции целых рациональных чисел, которые принимают одно и то же значение, когда значения аргумента сравнимы между собой по некоторому определенному модулю (в данном случае по $\bmod r$).

В виде следствий приводятся формулы для $N_s(n, r)$ при $n \equiv 0 \pmod r$, при $(n, r) = 1$ и т. д. Некоторые из этих формул были известны раньше.

Указывается также, что если $f(x_1, \ldots, x_s)$ — любая квадратичная форма с целыми рациональными коэффициентами и с дискриминантом Δ, взаимно простым с r, то число решений сравнения $f(x_1, \ldots, x_s) \equiv n \pmod r$ дается теми же формулами, что и $N_s(n, r)$, только произведение $a_1 \ldots a_s$ заменяется на Δ. *В. Б. Демьянов*

2097. Современные исследования по числовому интегральному исчислению Мишеля Чиполла. Пеллегрино (Sviluppi moderni del calcolo numerico integrale di Michele Cipolla. Pellegrino Franco), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 161—168 (итал.)

Мультипликативным произведением двух функций $f(n)$ и $g(n)$, заданных на множестве натуральных чисел, называется

$$h(n) = (f \times g)(n) = \sum_{d|n} f(d)\,g(n/d).$$

Для кольца I числовых функций с обычным сложением и мультипликативным умножением строится поле отношений K, элементы которого называются виртуальными числовыми функциями. Если $f(1) = f(2) = \ldots = f(m-1) = 0$, $f(m) \neq 0$, то $f(n)$ имеет порядок m. При мультипликативном умножении порядки перемножаются. Это обобщается на элементы поля отношений. Множество мультипликативных функций лежит в подгруппе единиц поля отношений и образует группу относительно мультипликативного умножения. Порядок аддитивных функций является степенью простого числа, логарифмических функций — простым числом. В K вводится метрика по формуле $|f - g| = 1^{\operatorname{ord}(f,\,g)}$ ($\operatorname{ord}(f, g)$ — порядок (f, g)) и показывается, что K является в этой метрике полным топологическим кольцом.

Доказаны некоторые числовые тождества.

Если l — аддитивная функция и f — любая, то

$$(l \times f)(n) = \sum_{i=1}^{r} \left[\sum_{s=1}^{\omega_i} l(p_i^s) \int f(n/p_i^s) - \right.$$

$$\left. - \sum_{s=1}^{\omega_i - 1} l(p_i^s) \int f(n/p_i^{s+1}) \right]; \quad n = \sum_{i=1}^{r} p_i^{\omega_i}.$$

При $\omega_i = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ эта формула была ранее доказана Чиполла.

Если l — логарифмическая, то

$$(l \times f)(n) = l(n) \int f(n) - \int l(n)\,f(n).$$

В частности, при $f = n$

$$\int l(n) = \frac{1}{2}\,\nu(n)\,l(n); \quad \nu(n) = \prod_{i=1}^{r} (1 + \omega_i).$$

Это свойство характеристично для логарифмических функций. Например, если $l(n)=\sum_{i=1}^{r}\omega_i$, то $\int l(n)=\frac{1}{2}\nu(n)\,l(n)$. *Н. Я. Виленкин*

2098. Замечания об арифметических прогрессиях. Серпинский (Remarques sur les progressions arithmétiques. Sierpiński W.), Colloq. math., 1954, **3**, № 1, 44—49 (франц.)

Рассматривается вопрос о существовании различных последовательностей чисел, образующих арифметическую прогрессию. При помощи простых соображений показывается, что геометрическая прогрессия $1, q, q^2, \ldots$ может содержать три члена, образующих арифметическую прогрессию только в случае иррационального q, и указывается, что если $q=(\sqrt{5}-1)/2$, то числа q^m, q^{m+1}, q^{m+3} образуют арифметическую прогрессию.

Для случая последовательности $1^2, 2^2, 3^2, \ldots$ также доказывается существование бесчисленного множества троек x^2, y^2, z^2, образующих арифметическую прогрессию.

Исследуются аналогичные вопросы для случая некоторых последовательностей трансфинитных чисел. Доказывается, что числа $n!$, $m!$, $p!$ никогда не образуют арифметической прогрессии, и затрагивается вопрос о существовании n простых чисел, образующих арифметическую прогрессию.

Статья заканчивается выводом предложений более общего характера: теоремой о существовании сколь угодно быстро растущей последовательности, содержащей арифметические прогрессии любой длины, и теоремы о возможности разложения множества натуральных чисел на два подмножества, не содержащих бесконечных прогрессий. Последняя теорема, принадлежащая, как указывает автор, Заранкевичу, интересна как доказательство невозможности усиления известной теоремы Ван-дер-Вардена.

Н. П. Романов

2099. Линейные возвратные соотношения. Бреннер (Linear recurrence relations. Brenner J. L.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 3, 171—173 (англ.)

Пусть возвратная последовательность определяется формулой:

$$u_{n+1}=\alpha_0 u_n+\alpha_1 u_{n-1}+\ldots+\alpha_{k-1}u_{n-k+1}+a,$$

где a и α_i, $i=0, \ldots, k-1$, — целые числа. Рассматриваются матрицы:

$$A=\begin{Vmatrix} 1000\ldots0 & a\\ 0000\ldots0 & \alpha_{k-1}\\ 0100\ldots0 & \alpha_{k-2}\\ 0010\ldots0 & \alpha_{k-3}\\ \cdots\cdots\cdots & \\ 0000\ldots1 & \alpha_0 \end{Vmatrix} \text{ и } B=\begin{Vmatrix} 0\,1\,u_{-1}\ldots u_{k-2}\\ 0\\ \cdot\\ \cdot \quad\quad A\\ \cdot\\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Тогда методом математической индукции можно получить формулу

$$B^{n+1}=\begin{Vmatrix} 0\,1\,u_{n-1}\ldots u_{n-k-2}\\ 0\\ \cdot\\ \cdot \quad\quad A^{n+1}\\ \cdot\\ 0 \end{Vmatrix}.$$

Далее, если матрица A неособенная по $\bmod p$, то найдется такое наименьшее положительное r, что $A^r\equiv 1 \pmod p$ и в этом случае $B^{r+1}\equiv B \pmod p$. Отсюда, как следствия, получаются некоторые свойства возвратных последовательностей, выведенные ранее из других соображений.

Библиография, 6 названий. *В. Д. Подсыпанин*

2100. Свойства сравнимости полиномов Эрмита, Лагерра и Лежандра. Карлиц (Congruence properties of the polynomials of Hermite, Laguerre and Legendre. Carlitz Leonard), Math. Z., 1954, **59**, № 5, 474—483 (англ.)

Пусть $H_n(x)$ — полином Эрмита степени n:

$$H_n(x)=\sum_{2s\leqslant n}(-1)^s(2x)^{n-2s}\frac{n!}{s!\,(n-2s)!}.$$

Доказывается, что

$$H_{n+m}(x)\equiv(2x)^m H_n(x) \pmod m,$$

$$\sum_{s=0}^{2r}(-1)^{2r-s}\binom{2r}{s}H_{n+sm}(x)\,H_{(2r-s)m}(x)\equiv$$

$$\equiv\sum_{s=0}^{2r-1}(-1)^{2r-1-s}\binom{2r-1}{s}H_{n+sm}(x)\,H_{(2r-1-s)m}(x)\equiv$$

$$\equiv 0 \pmod{m^r},$$

где n, m и r — любые натуральные числа. Ряд более или менее аналогичных сравнений выводится также для полиномов Лагерра и Лежандра. Доказательства опираются на то, что рекуррентная последовательность $u_{n+1}=f(n)\,u_n+g(n)\,u_{n-1}$ (где f и g — многочлены с целыми коэффициентами, $g(0)=0$, $u_0=1$, $u_1=f(0)$) обладает следующими свойствами:

$$1)\ u_{n+m}\equiv u_n u_m \pmod m,$$

$$2)\ \sum_{s=0}^{2r}(-1)^{2r-s}\binom{2r}{s}u_{n+sm}\,u_{(2r-s)m}\equiv$$

$$\equiv\sum_{s=0}^{2r-1}(-1)^{2r-1-s}\binom{2r-1}{s}u_{n+sm}\,u_{(2r-1-s)m}\equiv 0 \pmod{m^r}$$

(n, m, r — любые натуральные). *В. Б. Демьянов*

2101. Об уравнении $x^m+1=y^n$. Облат (Über die Gleichung $x^m+1=y^n$. Obláth R.), Ann. polon. math., 1954, **1**, № 1, 73—76 (нем.)

Вопрос, поставленный математиками средневековья, существует ли два последовательных числа, представляющих полную степень (исключая тривиальные пары: $-1,0$; $0,1$; $8,9$), еще не решен.

В неопубликованной работе Хампель (R. Hampel) доказал следующие две теоремы:

Теорема 1. Если целые числа x, y удовлетворяют условию

$$|x-y|=1, \tag{1}$$

то диофантово уравнение

$$x^m+1=y^n \tag{2}$$

имеет только три решения: $-1,0$; $0,1$; $2,3$.

Теорема 2. Если исключить решения уравнения (2) и тривиальные случаи $x=\pm 2$, $y=\pm 1$,

$n=2$; $x=\pm 1$, $y=\pm 2$, $m=2$, то при выполнении условия (1) $|x^m-y^n|=k\geqslant\max(5,\ y+1)$. Для обеих теорем автор дает новые, весьма простые доказательства.

Далее исходя из того, что сравнение $2^{n-1}\equiv 1 (\mathrm{mod}\, n^2)$ при простом $n<25000$ имеет лишь два решения: $n=1093$ и $n=3511$ (Nagell T., Norsk. mat. tidskr., 1919, 1) автор формулирует и доказывает новую теорему.

Теорема 3. Диофантово уравнение $x^2-1=y^n$, где n — любое простое число <25000, имеет только тривиальные решения: 0, —1; 1,0; 3,2.

Библиография, 6 названий. *И. Г. Мельников*

2102. Замечание к предыдущей статье о последней теореме Ферма. Дюпарк, Вейнгарден (Note on a previous paper on Fermat's last theorem. Duparc H. J. A., Wijngaarden A. van), Nieuw arch. wiskunde, 1954, **2**, № 1, 40—41 (англ.)

Пусть $x^p+y^p=z^p$, где $z>y>x>0$ — целые числа, $(p,\ xyz)=1$, p — простое >7. В предыдущей работе авторов (РЖМат, 1954, 2513) получена оценка для z: $z>10^{6\cdot 10^9}$. В настоящей работе упомянутый результат улучшается:

$$z>y>x>10^{6\cdot 10^8}.$$

Н. П. Реморов

2103. Ответ на вопрос А. Мёснера, напечатанный в «Boll. Unione mat. ital.», 1953, 8, № 2, 204. Палама (Risposta alla questione di A. Moessner apparsa nel «Boll. dell' Un. Mat. It.», 3, 8 (1953), fasc. 2, p. 204. Palama à G.), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 343 (итал.)

Дается общее решение системы диофантовых уравнений, предложенной Меснером

$$2[3(n^2+np+p^2)]^k=(-n^2-3np+p^2)^k+$$
$$+(n^2-3np-p^2)^k+(-n^2+np+3p^2)^k+$$
$$+(3n^2+np-p^2)^k+(n^2+5np+3p^2)^k+$$
$$+(3n^2+5np+p^2)^k,\ k=1,\ 3,\ 5.$$

В. А. Голубев

2104. Число полиномиальных коэффициентов. Эрдёш, Нивен (The number of multinomial coefficients. Erdös Paul, Niven Ivan), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 1, 37—39 (англ.)

Пусть $f(x)$ — число целых чисел вида

$$\frac{n!}{i_1!\,i_2!\ldots i_r!\,(n-k)!},\quad \sum_{j=1}^{r} i_j=k,$$
$$i_1\leqslant i_2\leqslant\ldots\leqslant i_r\leqslant n-k\leqslant n-2,$$

меньших положительного числа x.

Тогда

$$f(x)=(1+\sqrt{2})\,x^{1/2}+o(x^{1/2}).$$

Э. Апарисио

2105. О проблеме, связанной с решеткой из 36 точек. Серпинский (Sur un problème concernant un réseau à 36 points. Sierpiński Wacław), Ann. Soc. polon. math., 1953, **24**, № 2, 173—174 (франц.)

Пусть R_n обозначает множество точек $P(x,\ y)$, где x, y — целые числа и $1\leqslant x\leqslant n$, $1\leqslant y\leqslant n$. Автор обозначает через $k(n)$ такое наименьшее целое число, что каждое подмножество R_n, составленное из $k(n)$ точек, содержит 9 точек, расположенных в трех строках и в трех колоннах R_n, и доказывает, что $k(6)=27$. *A. Mostowski*

2106. О штифелевых магических квадратах. Бибербах (Über Stifelsche magische Quadrate. Bieberbach Ludwig), Arch. Math., 1954, **5**, № 1—3, 4—11 (нем.)

Магический квадрат n-го порядка принято называть штифелевым, если он остается магическим после удаления по равному числу наружных строк сверху и снизу и столбцов справа и слева. Элементы оставшегося магического квадрата могут и не образовывать ряд последовательных чисел.

В качестве некоторого обобщения в статье доказывается, что из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n^2$ всегда можно построить и такой штифелев квадрат n-го порядка, крайние строки и столбцы которого будут состоять из чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-2$ и их дополнений до n^2+1. Устанавливается возможное распределение этих чисел в крайней рамке и обосновываются условия, при которых числа a и b из последовательности $1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-2$ могут располагаться по углам внешней рамки. Дается алгоритм построения указанного магического квадрата для четного n при некоторых ограничениях, наложенных на числа a и b.

В. А. Кордемский

2107. Расположение остатков в двух классах простых чисел. Сер (La disposition des restes dans les deux classes de nombres premiers. Ser J.), Mathesis, 1954, **63**, № 1—2, 18—20 (франц.)

На примерах $p=11$ и $p=13$ рассматривается различное расположение остатков произведений ab ($a=1,2,\ \ldots,\ p-1$; $b=1,2,\ \ldots,\ p-1$) по модулям $p=4m+3$ и $p=4m+1$.

Примечание референта. В таблице для $p=11$ нет правого столбца остатков. *В. А. Голубев*

2108 К. Свойства делимости рекурсивных последовательностей. Дюпарк (Divisibility properties of recurring sequences. Duparc Herman Johan Arie, Thesis, 96 pp., University of Amsterdam, 1953) (англ.)

В работе рассматривается общая теория линейных рекурсивных последовательностей, члены которой являются элементами кольца R, в котором разложение на простые сомножители единственное и в котором множество вычетов по любому модулю, принадлежащему R, конечно.

Работа состоит из двух частей. В первой части рассматриваются алгебраические свойства кольца R и расширение R до элементов многочленов. Во второй части исследуются рекурсивные последовательности W_n вида $W_{n+N}=\sum_{h=1}^{N} a_h W_{n+N-h}$ $(n=0,1,\ldots)$ с коэффициентами и начальными значениями из R. Главным вопросом исследования является период и квазипериод W_n по модулю m, т. е. числа c, для которых $W_{n+c}\equiv uW_n (\mathrm{mod}\, m)$, где u принадлежит специальному множеству.

После рассмотрения общего случая, в котором R является кольцом целых рациональных чисел, рассматриваются частные случаи, охватывающие классические функции Люка (Lucas), их обобщения по Лемеру (Lehmer) и рекурсивные последовательности третьего и высших порядков, соответствующие трехчленному уравнению. Дается несколько численных примеров. Список литературы охватывает 15 работ. Не упоминаются имена Хола, Пирса и Пуле (M. Hall, T. A. Pierce, P. Poulet). *D. H. Lehmer*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 200.

2109 К. **Теория чисел. Моримото** (數論·森本清吾), 210 стр., 共立 (Кёрицу), 1953, 280 иен), 科學 (Кагаку), 1954, **24**, № 2, 53 (библ.)

2110 Д. **О целых точках на эллипсоидах. Малышев А. В.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1954

См. также: 2055, 2257

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

2111. **Теорема о специальном классе почти вандермондовых определителей. Шапиро** (A theorem on a special class of near-Vandermonde determinants. Shapiro V. L.), Amer. Math. Monthly, 1953, **60**, № 10, 697—699 (англ.)

Автор называет почти вандермондовыми определители матриц $\| a_{ik} \|$, где $a_{ik} = x_k^{2i}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

В работе устанавливается, что определитель Δ_n матрицы $\| a_{ik} \|$, где $a_{ik} = k^{2i}$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, не равен нулю для бесконечного числа значений n.

Приведенный результат не является новым, так как известно, что обобщенный определитель Вандермонда $V = |a_i^{\alpha_k}|_1^n > 0$, если $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$; $\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_n$ (см., например, Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем, изд. 2, 1950). *А. Ф. Голубчиков*

2112. **Непрерывные преобразования системы n векторов. Лейтнер Р.,** Biul. Wojsk. acad. techn. Prace math., 1953, **2**, № 6, 93—100

Для любых двух одинаково ориентированных n-эдров (систем из n линейно независимых векторов) с матрицами A и B в n-мерном аффинном пространстве можно построить матрицу H_t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, $H_0 = A$, $H_1 = B$, аналитическую и невырожденную при любом t. *Г. Е. Шилов*

2113. **Бесконечные матрицы и линейные системы. Керубино** (Matrici e sistemi lineari infiniti. Cherubino Salvatore), Ann. Scuola norm. sup. Pisa, 1952, **6**, № 3—4, 291—313 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Если бесконечная матрица A имеет правую норму $N = A\bar{A}_{-1}$ ($\bar{A}_{-1}$ — транспонированная комплексно-сопряженная с A матрица) и если существует произведение $b\bar{A}_{-1}$, то для того чтобы уравнение $xA = b$ (x и b — строки) было разрешимо, необходимо, чтобы матрица N была обратима справа и чтобы существовало произведение $b\bar{A}_{-1}{}^{D}N^{-1}$ (${}^{D}N^{-1}$ — правая обратная к N). При этом предполагается выполнение ассоциативного закона для умножения. Если как строки, так и столбцы матрицы A линейно независимы (т. е. уравнения $xA = 0$ и $Ax = 0$ имеют лишь нулевое решение), то это условие и достаточно. Если $A\bar{A}_{-1}$ существует и выполняется закон ассоциативности, то уравнение $xA = 0$ имеет ненулевое решение лишь тогда, когда N необратима справа. Указаны условия, при которых решение имеет вид bA^{-1}. Для однородных систем строится аналог фундаментальной системы решений. Если A — матрица с p строками и бесконечным числом столбцов, а B — матрица с p столбцами и бесконечным числом строк и если существует матрица $AB = C$, то

$$\det C = \sum_{\substack{t_1, \ldots, t_p = 1 \\ t_1 < t_2 < \ldots < t_p}}^{\infty} A^{t_1, \ldots, t_p} \; B_{t_1, \ldots, t_p},$$

где $A^{t_1, \ldots, t_p}$ — минор p-го порядка, составленный из столбцов $t_1, \ldots, t_p$ матрицы A, а $B_{t_1, \ldots, t_p}$ — минор p-го порядка, составленный из строк $t_1, \ldots, t_p$ матрицы B. *Н. Я. Виленкин*

2114. **О характеристических числах матрицы с предписанными сингулярными числами. Хорн** (On the eigenvalues of a matrix with prescribed singular values. Horn Alfred), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 1, 4—7 (англ.)

Сингулярными числами комплексной матрицы A называются неотрицательные значения квадратных корней из характеристических чисел матрицы AA^*. Пара векторов $\lambda(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ называется допустимой, если существует $n \times n$ матрица A с характеристическими числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и сингулярными числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Вейль (Weyl H., Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1954, **35**, 408—411) доказал, что если пара (λ, α) допустима и

$$\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_n \geqslant 0; \quad |\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \ldots \geqslant |\lambda_n|, \tag{1}$$

то

$$|\lambda_1| \cdot |\lambda_2| \ldots |\lambda_k| \leqslant \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{2}$$

$$|\lambda_1| \, |\lambda_2| \ldots |\lambda_n| = \alpha_1 \cdot \alpha_2 \ldots \alpha_n. \tag{3}$$

В статье доказано, что пара векторов, удовлетворяющая условиям (1) — (3), является допустимой и что необходимым и достаточным условием допустимости пары (λ, α), $\lambda_i > 0$, $\alpha_i \geqslant 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ является также существование эрмитовой матрицы

$\|A_{ij}\|_1^n$ с характеристическими числами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, удовлетворяющей условиям

$$\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_k = \begin{vmatrix} A_{11}\ldots A_{1k} \\ \ldots\ldots\ldots \\ A_{k1}\ldots A_{kk} \end{vmatrix} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Д. М. Котелянский

2115. Матричное дифференцирование S-функций. Фаулкс (Matrix differentiation of S-functions. Foulkes H. O.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, **10**, сер. 2, 5—10 (англ.)

Тернбал (Turnbull H. W., Proc. Edinburgh Math. Soc., 1927, сер. 2, № 2, 111—128) ввел матричный дифференциальный оператор $\Omega = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ki}}\right)$, применив его как к скалярным, так и к матричным функциям матрицы $X = (x_{ik})$.

Пусть $S_a = \sum_{i=1}^n \lambda_i^a$ (λ_i — характеристические корни матрицы X); $(\lambda) = (1^a, 2^b, \ldots)$ — разбиение числа n на натуральные слагаемые; $\chi_\rho^{(\lambda)}$ — характер ρ-го класса в неприводимом представлении симметрической группы, соответствующем разбиению (λ) числа n, h_ρ — порядок этого класса. Симметрические функции типа

$$\{\lambda\} = \frac{1}{n!}\sum_\rho h_\rho \chi_\rho^{(\lambda)} S_1^a S_2^b \ldots$$

Литлвуд назвал S-функциями или функциями Шура (Littlewood D. E., Group characters and matrix representations of groups, Oxford, 1940). В реферируемой статье даны выражения для $\Omega\{\lambda\}$ в виде многочленов от матрицы X с коэффициентами, являющимися линейными комбинациями S-функций. Используя свойства ранее введенных им дифференциальных операторов $D_{(\lambda)}$ и известные свойства характеров симметрической группы, автор дает способ нахождения этих коэффициентов без применения таблиц характеров.

Обобщая результаты Тернбала, автор получает для S-функций и их линейных комбинаций соотношения, связанные с повторным применением оператора Ω, например:

$$\Omega^3\{p, 1\} = (n + p - 1)\,\Omega^2\{p - 1, 1\}.$$

Л. М. Глускин

ГРУППЫ

2116. О бесконечных разрешимых группах. (V). Гирш (On infinite soluble groups (V). Hirsch K. A.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 2, № 114, 250—251 (англ.)

Доказывается, что Ф-подгруппа (определение см. Курош А. Г., Теория групп, изд. 2-е, М., Гостехиздат, 1953, 401) разрешимой группы G с условием максимальности для подгрупп нильпотентна.

Автор отмечает, что этот результат получен также Ито (Itô N., Proc. Japan Acad., 1953, **29**, 149—150), а для конечной группы G доказан ранее Фраттини (Frattini G., Atti Reale Accad. Lincei. Rendiconti (IV), 1885, **1**, 281—285). *Д. М. Смирнов*

2117. О теоремах Куликова и Дьёдонне. Кертес (On a theorem of Kulikov and Dieudonné. Kertész A.), Acta scient. math., 1953, **15**, № 1, 61—69 (англ.)

Множество S ненулевых элементов группы G называется независимой системой группы, если для всякого конечного подмножества $a_1, \ldots, a_n$ множества S из соотношения $r_1a_1 + \cdots + r_na_n = 0$, где $r_1, \ldots, r_n$ — целые рациональные числа, всегда следует $r_1a_1 = \ldots = r_na_n = 0$. Максимальная независимая система P подгруппы B группы G называется главной системой группы B относительно G, если ни один элемент из P нельзя заменить элементом из B, имеющим в G большую высоту, не нарушив независимости системы.

Основным результатом работы является теорема: Абелева p-группа G тогда и только тогда разложима в прямую сумму циклических и квазициклических подгрупп, если: 1) всякий элемент группы G бесконечной высоты содержится в некоторой квазициклической подгруппе группы G, 2) существует подгруппа B группы G, обладающая главной системой относительно G, 3) G/B является прямой суммой циклических групп.

Из этой теоремы выводятся теорема Дьёдонне (Dieudonné J., Portugaliae Math., 1952, **11**, 1—5) и теорема, установленная референтом (Матем. сб., 1945, **16**(58), 126—162, теорема 1). *Л. Я. Куликов*

2118. Абелевы группы, у которых каждая подгруппа с конечным числом образующих есть эндоморфный образ. Кертес, Селе (Abelian groups every finitely generated subgroup of which is an endomorphic image. Kertész A., Szele T.), Acta scient. math., 1953, **15**, № 1, 70—76 (англ.)

Обозначим через $\mathfrak{A}$ класс абелевых групп, у которых каждая подгруппа с конечным числом образующих является эндоморфным образом группы. Доказываются следующие две теоремы, описывающие строение групп этого класса:

1) Периодическая абелева группа G тогда и только тогда принадлежит классу $\mathfrak{A}$, когда всякая примарная компонента P группы G удовлетворяет условию: если максимальная полная подгруппа A группы P не является нулевой, то P/A есть неограниченная группа (т. е. содержит элементы как угодно большого порядка).

2) Абелева группа G, содержащая элементы бесконечного порядка, тогда и только тогда принадлежит классу $\mathfrak{A}$, когда либо G есть прямая сумма конечного числа бесконечных циклических групп и периодической группы, принадлежащей к классу $\mathfrak{A}$, либо G имеет прямые слагаемые любого конечного ранга, разложимые в прямую сумму бесконечных циклических подгрупп. *Л. Я. Куликов*

2119. Прямые множители конечных групп. Бер (Direkte Faktoren endlicher Gruppen. Baer Reinhold), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 3—4, 167—179 (нем.)

Устанавливаются необходимые и достаточные условия, при которых подгруппа конечной группы является ее прямым или абелевым прямым множителем; приводим некоторые из них.

Пусть G — конечная группа, G' — коммутант G, $Z(G)$ — центр G, $Z(S \subset G)$ — централизатор S в G, $\Phi(G)$ — пересечение всех максимальных под-

групп группы G. Пусть $\Phi_0(G) = G$ и $\Phi_{i+1}(G) = \Phi[\Phi_i(G)]$.

1. Нормальный делитель N тогда и только тогда является абелевым прямым множителем конечной группы G, если $N \cap G' = 1$ и $\Phi_i(G'N/G') = (G'N/G') \cap \Phi_i(G/G')$ для любого i.

2. Нормальный делитель N конечной группы G тогда и только тогда является абелевым прямым множителем G, если для каждой подгруппы U группы G, заключающей N, $\Phi_i(N) = N \cap G'\Phi_i(U)$ при любом i.

3. Следующие свойства подгруппы N эквивалентны:

а) N является прямым множителем G;

б) каждая подгруппа U группы G, содержащая N, удовлетворяет условиям:

$$N'\Phi_i(N) = N \cap G'\Phi_i(U);$$

$$\Phi_i(U) = \Phi_i(N)\,\Phi_i[Z(N \subset U)];$$

$$G'\Phi_i(U)/N'\Phi_i(N) \simeq$$

$$\simeq Z(N \subset G')\,\Phi_i[Z(N \subset U)]/\Phi_i[Z(N)];$$

в) Каждая подгруппа U группы G, содержащая N, удовлетворяет условиям:

$$NG'\Phi_i(U)/N \simeq$$

$$\simeq Z(N \subset G')\,\Phi_i[Z(N \subset U)]/\Phi_i[Z(N)];$$

$$\Phi_i(U) = \Phi_i(N)\,\Phi_i[Z(N \subset U)];$$

г) $G = NZ(N \subset G)$ и каждая подгруппа V группы $Z(N \subset G)$, содержащая $Z(N)$, удовлетворяет условиям:

$$\Phi_i[Z(N)] = Z(N) \cap Z(N \subset G')\Phi_i(V).$$

Всюду i — любое целое положительное число.

А. П. Дицман

2120. Транзитивные расширения групп диэдра. Холиок (Transitive extensions of dihedral groups. Holyoke T. C.), Math. Z., 1954, **60**, № 1, 79—80 (англ.)

Пусть G — транзитивная группа подстановок заданной системы символов. Присоединим к системе новый символ, остающийся неподвижным при всех подстановках группы G. Транзитивная группа подстановок H расширенной системы называется транзитивным расширением для G, если G есть максимальная подгруппа из H, сохраняющая присоединенный символ. В другой работе (Amer. J. Math., 1952, **74**, 787—796) автор установил необходимые и достаточные условия существования транзитивного расширения.

В настоящей работе доказывается, что группа диэдра, т. е. группа $G = \{f, w\}$ с определяющими соотношениями $f^2 = 1$, $wf = fw^{-1}$, рассматриваемая как группа подстановок своих смежных классов Fw^i, $F = \{f\}$, $i = 0, \pm 1, \ldots$, обладает транзитивным расширением только тогда, когда ее порядок равен четырем, шести или десяти.

П. Г. Конторович

2121. О порядке группы автоморфизмов конечной группы. Скотт (On the order of the automorphism group of a finite group. Scott W. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 1, 23—24 (англ.)

Устанавливается оценка снизу для порядка группы всех автоморфизмов конечной группы в зависимости от порядка последней.

Пусть G — конечная группа порядка $o(G)$, Γ — группа всех автоморфизмов G, p — простое число. Херстейн и Адней (Herstein I. N., Adney J. E., Amer. Math. Monthly, 1952, 59, 309—310) показали, что если $p^2 \mid o(G)$, то $p \mid o(\Gamma)$. В реферируемой работе доказывается, что если $p^3 \mid o(G)$, то $p^2 \mid o(\Gamma)$.

Д. М. Смирнов

2122. О некотором классе идеалов в L^1-алгебре локально компактной абелевой группы. Рейтер (On a certain class of ideals in the L^1-algebra of a locally compact abelian group. Reiter H. J.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, **75**, № 3, 505—509 (англ.)

Продолжение предыдущей публикации автора (Trans. Amer. Math. Soc., 1952, **73**, 401—427). Пусть I — замкнутый идеал алгебры $L^1(G)$ локально компактной абелевой группы G со счетным коспектром Z_1, состоящим из независимых элементов (т. е. таких элементов группы характеров X, что $\chi_1^{k_1}\chi_2^{k_2}\ldots\chi_n^{k_n} = e$ лишь в случае равенства нулю целых чисел $k_1, \ldots, k_n$). Доказывается, что тогда фактор-алгебра L^1/I алгебраически изоморфна и изометрична нормированному кольцу $C(Z_1)$. Через $C(Z_1)$ обозначено кольцо непрерывных комплексных функций на Z_1, обращающихся в нуль на бесконечности, с нормой $\|c(x)\| = \max_{x \in Z_1} |c(x)|$ и обычным умножением. Если Z — любое замкнутое счетное подмножество X, состоящее из независимых элементов, то для любой функции $c(x)$ из $C(Z)$ существует такая функция $f(g) \in L^1$, что ее преобразование Фурье совпадает с $c(x)$.

Н. Я. Виленкин

2123. Замечания об изотопах. Эллис (Remarks on isotopies. Ellis David), Publs mathematicae, 1952, **2**, № 3—4, 175—177 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Группоид $G = G(*)$ называется обобщенно абелевым (о. а.), если существуют такие четыре подстановки P, Q, R и S элементов G, что $xP * yQ = yR * xS$ для всех x, y из G. Следуя Чоудхури (Choudhury A. C., Bull. Calcutta Math. Soc., 1948, **40**, 183—194), автор называет гомотопией группоида $G(*)$ на группоид $H(+)$ тройку однозначных отображений C, A, B группоида $G(*)$ на $H(+)$, для которой всегда $(x * y)C = xA + yB$. Если отображения C, A, B взаимно однозначны, то гомотопия называется изотопией. Множество с одной бинарной идемпотентной, коммутативной и ассоциативной операцией называется полуструктурой.

Доказаны следующие теоремы: 1) Пусть $G(*)$ и $H(+)$ — изотопные группоиды; $G(*)$ о. а. тогда и только тогда, если $H(+)$ о. а.; 2) Если $G(*)$ имеет единицу e и о. а., то существует такая подстановка V в $G(*)$, что $x * y = yV^{-1} * xV$ для всех x, y из $G(*)$. Если eV — идемпотент, то группоид $G(*)$ абелев; 3) о. а. полугруппа с единицей всегда абелева; 4) Если квазигруппа о. а. и обобщенно ассоциативна (т. е. если существуют подстановки $A, B, C, D, E, F, G, H, I$ и J, для которых $((xA * yB)C * zD)E = (xF * (yG * zH)I)J$, то она изоморфна абелевой группе; 5) Всякая гомотопия полуструктуры $G(*)$ на полуструктуру $H(+)$ яв-

ляется гомоморфизмом $G(*)$ на $H(+)$; 6) В полуструктуре $G(*)$ тогда и только тогда можно доопределить вторую операцию так, чтобы G стала структурой, если G изотопна полуструктуре некоторой структуры; в этом случае две структуры изоморфны. *Ю. И. Соркин*

2124 Д. Структура группы и образ группы. Краузе (Gruppenstruktur und Gruppenbild. Krause Hans Ulrich, Thesis, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, 1953, 45 pp.) (нем.)

Граф G, по предположению связный и конечного порядка, принадлежит (как «образ группы») группе $\mathfrak{G}$, если $\mathfrak{G}$ является простой транзитивной группой автоморфизмов графа G. Это определение эквивалентно определению Дена, где G конструируется из вершин, поставленных в соответствие с каждым элементом g из $\mathfrak{G}$, причем вершины, соответствующие g_i и g_j, связаны тогда и только тогда, когда $g_i g_j^{-1}$ есть элемент из фиксированного множества образующих. Конечные группы тогда и только тогда имеют общий граф (т. е. симплекс), когда они имеют одинаковые порядки. В силу этого результата две абелевы группы с конечным числом образующих тогда и только тогда имеют общий граф, когда они имеют равные ранги и их периодические группы имеют одинаковые порядки.

Достаточность легко следует из конструкции произведения. Доказательство необходимости для свободных абелевых групп может быть проведено при помощи исследования автоморфизмов графа G, оставляющих неподвижной некоторую вершину; при этом показывается, что ранг равен $\lim (\ln V(r)/\ln r)$, где $V(r)$ — число вершин, расстояния которых от данной вершины не более r. Полная теорема доказывается построением отображения $f: G \sim G'$, индуцирующего отображение F группы $\mathfrak{G}$ на группу $\mathfrak{G}'/\mathfrak{T}'$, которое переводит 0 в 0. В таком случае функция $\Phi(a) = F(a+b) - F(a)$ удовлетворяет условию $\Sigma_{a'}[\Phi(a) - \Phi(a')] = 0$, где суммирование происходит по всем a', соседним с a. Гармоническая функция Φ, которая сопоставлена с группой $\mathfrak{G}'/\mathfrak{T}'$ и достигает максимума, должна быть константой и, следовательно, равна 0. Таким образом, F — гомоморфизм, и отсюда следует доказательство теоремы. *R. C. Lyndon*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 99.

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

2125. Об s-дифферентах и дифференциалах полей алгебраических функций одной переменной. Лампрехт (Über s-Differenten und Differentiale algebraischer Funktionenkörper einer Veränderlichen. Lamprecht Erich), Arch. Math., 1953, 4, № 5/6, 412—424 (нем.)

Дается обобщение понятия дифференты и теорем о связях между дифференциалами в поле алгебраических функций и его конечном расширении на случай несепарабельных расширений.

Линейная функция $s(\xi)$ от элемента коммутативной алгебры с единицей A/K над полем K ($s(\xi) \in K$) называется собственной, если из $s(\xi\eta) = 0$ для всех $\xi \in A$ следует $\eta = 0$.

s-дискриминантом базиса $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называется $D_s(\omega_1, \ldots, \omega_n) = |s(\omega_i\omega_j)|$. Если s — собственная функция, то s-дискриминант базиса $\neq 0$. Если $A \supset M \supset K$, где M — поле, и $\sigma(\eta)$ — заданная собственная линейная функция в M/K, то для каждой линейной функции $s(\xi)$ в A/K существует единственная такая линейная функция $\bar{s}(\xi)$ в A/M, что $s(\xi) = \sigma(\bar{s}(\xi))$.

При помощи этих понятий теория дифференты дискретно нормированных полей и полей алгебраических функций легко обобщается путем замены следа любой собственной линейной функцией. Это дает возможность рассматривать дифференты и в несепарабельных расширениях, где, как известно, след является несобственной функцией. Для получающегося таким образом понятия s-дифференты доказывается точный аналог мультипликативной формулы для обычной дифференты.

Если s-дифференту расширения A/K обозначить через $\mathfrak{D}_s(A/K)$, а через s_α — линейную функцию $s_\alpha(\xi) = s(\alpha\xi)$, то имеет место формула $\mathfrak{D}_{s_\alpha}(A/K) = \mathfrak{D}_s(A/K)\,\alpha$. Так как всякая собственная функция может быть представлена в виде s_α при некотором α, то отсюда следует, что все s-дифференты образуют один класс дивизоров.

Пусть $\mathfrak{y}$ есть идеальный элемент, т. е. последовательность $(\cdots \nu_{\mathfrak{P}} \cdots)$ элементов $\mathfrak{P}$-адических замыканий $A_{\mathfrak{P}}$ поля A алгебраических функций одной переменной для всех простых дивизоров $\mathfrak{P}$. При этом только конечное число $\nu_{\mathfrak{P}}$ не целое. Пусть A является конечным расширением K, причем они имеют одно и то же поле констант. Всякая линейная функция s на A/K естественным образом индуцирует функцию $s^{\mathfrak{P}}$ на $A_{\mathfrak{P}}/K_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}$. Рассмотрим идеальный элемент $\mathfrak{r} = (\cdots \mathfrak{r}_{\mathfrak{p}} \cdots)$ поля K с $\mathfrak{r}_{\mathfrak{p}} = \sum_{\mathfrak{P} \mid \mathfrak{p}} s^{\mathfrak{P}}(\mathfrak{y}_{\mathfrak{P}})$ для всех $\mathfrak{p}$ из K. $\mathfrak{r}$ обозначается через $s(\mathfrak{y})$.

Согласно Вейлю, всякий дифференциал ω поля K определяет характер $\omega(\mathfrak{r})$ группы идеальных элементов. Ему соответствует определяемый формулой $\Omega(\mathfrak{y}) = \omega(s(\mathfrak{y}))$ характер $\Omega(\mathfrak{y})$ с соответствующим единственным дифференциалом Ω поля A. Ω обозначается $\cos p_s\,\omega$. Доказываются следующие формулы, хорошо известные в случае сепарабельных расширений:

$$1)\quad \mathfrak{a}(\cos p_s\,\omega) = \mathfrak{D}_s(A/K)\,\mathfrak{a}(\omega),$$

$$2)\quad G - 1 = (A:K)(g-1) + \frac{1}{2}\,d(\mathfrak{D}_s(A/K)).$$

Здесь $\mathfrak{a}(\omega)$ означает дивизор, соответствующий дифференциалу ω, G и g — роды полей A и K и $d(\mathfrak{D}_s(A/K))$ — порядок дивизора $\mathfrak{D}_s(A/K)$.

Соотношение 1) не между дивизорами, а только между содержащими их классами было получено Шмидтом (Schmidt F. K., Math. Z., 1936, 41, 415—438). Соотношение 2) следует уже из этой ослабленной формы соотношения 1). *И. Р. Шафаревич*

2126. Некоммутативные расширения гильбертовых колец. Кертис (Noncommutative extensions of Hilbert rings. Curtis Charles W.),

Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 945—955 (англ.)

Пусть R — гильбертово кольцо, т. е. коммутативное кольцо с единицей, в любом гомоморфном образе которого радикал Джекобсона совпадает с ниль-радикалом. Некоммутативное расширение S кольца R называется целым, если в S имеет место условие обрыва возрастающих цепей R-подмодулей. Идеал U кольца S называется примитивным, если он является ядром неприводимого представления S.

Доказываются следующие теоремы:

1. Пусть S — целое расширение R, а R — расширение некоторого поля E, обладающее тем свойством, что для любого максимального идеала $\mathfrak{m}$ из R степень $[R/\mathfrak{m} : E]$ конечна. Тогда каждое неприводимое представление S над E конечно.

2. Пусть S — целое расширение R. Все простые идеалы кольца S являются пересечениями примитивных идеалов тогда и только тогда, когда R есть гильбертово кольцо.

Доказываются еще две теоремы о неприводимых представлениях кольца многочленов $S[X]$.

Полученные результаты применяются к универсальному ассоциативному представлению A конечной алгебры Ли L на полем простой характеристики. В частности, доказывается, что любая конечная полупростая алгебра Ли имеет точное конечное и вполне приводимое линейное представление.

А. И. Узков

2127. О понятии фильтра в теории колец. Вильямайор (On the concept of filter in ring theory. Villamayor Orlando E.), Rev. Union mat. Argentina, 1953, **15**, 173—180 (англ.)

Пусть R — кольцо и B — левый R-модуль, являющийся R-гомоморфным образом кольца R, если R рассматривать как левый R-модуль. Пусть σ — этот гомоморфизм. Элемент u модуля B назван R-единичным вектором, если $ru = \sigma(r)$ для каждого $r \in R$. Левый фильтр определяется как прообраз R-единичного вектора. Автор доказывает несколько элементарных и совершенно очевидных результатов о таких фильтрах. *I. N. Herstein*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 96.

2128. Полные идеальные в широком смысле кольца. I. Редеи (Vollidealringe im weiteren Sinn. I. Rédei L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, № 4, 243—268 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.)

В одной из более ранних работ автора (Monatsh. Math., 1952, **56**, 89—95) в качестве теоретико-кольцевого аналога гамильтоновых групп рассматриваются кольца, все подмодули которых являются двусторонними идеалами; такие кольца названы автором полными идеальными кольцами. В настоящей работе вводится понятие полного идеального в широком смысле кольца как такого кольца, все подкольца которого являются двусторонними идеалами.

В I части работы дается описание полных идеальных в широком смысле колец с одним образующим, а именно доказывается следующая теорема: Все полные идеальные в широком смысле кольца с одним образующим исчерпываются факторкольцами вида (1) $xI[x]/x(x-a)\prod_p \mathfrak{P}$ и (2) $xI[x]/x\prod_p \mathfrak{P}$. Здесь $I[x]$ есть кольцо многочленов от x с целочисленными коэффициентами; произведение $\prod_p \mathfrak{P}$ распространяется на конечное число различных простых чисел p, которые в случае (1) являются делителями a; $\mathfrak{p}$ в случае (1) является одним из идеалов 1) $(x(x-b), p)$, $p \nmid b$ или 2) $(x-b, p)$, а в случае (2) — одним из идеалов вида 3) $(x(x-a) \times (x-b), p(x-a), p^n)$, $p \mid a$, $p \nmid b$, $n \geqslant 2$, 4) $((x-a) \times (x-b) + p^{n-1}bc, p(x-a), p^n)$, $p \mid a$, $n \geqslant 2$, 5) $(x-a, p^n)$, $n \geqslant 1$, 6) $(x^2(x-a), p)$, $p \nmid a$ или 7) $(x(x-a), p)$ кольца $I[x]$.

Во второй части работы автор предполагает рассмотреть общий случай. Но уже из результатов первой части вытекает непосредственно, что каждый элемент произвольного полного идеального в широком смысле кольца удовлетворяет алгебраическому уравнению степени $\leqslant 4$ с целочисленными коэффициентами со старшим коэффициентом 1 и постоянным членом, равным нулю (является алгебраическим степени $\leqslant 3$). *Л. И. Головина*

2129. Полные идеальные в широком смысле кольца. Редеи (Vollidealringe im weiteren Sinn. Rédei L.), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 186 (нем.)

Заметка содержит краткое изложение результатов другой работы автора (см. реф. 2128).

Л. И. Головина

2130. К теории абелевых алгебр. Кохендёрфер (Zur Theorie der abelschen Algebren. Kochendörffer Rudolf), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 173 (нем.)

Краткое сообщение о результатах, подробно изложенных в другой статье автора (РЖМат, 1954, 3631). *Д. К. Фаддеев*

2131. По поводу заметки «К теории альтернативных тел». Скорняков Л. А., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2(60), 185—188

Доказывается следующая теорема: Если в альтернативном кольце характеристики $\chi \neq 3$ элементы a, b, c, d таковы, что ассоциатор для любых трех из них равен нулю, то $[ab, c, d] = 0$.

Для альтернативного тела ограничение на характеристику снимается, но приводится пример альтернативной алгебры ранга 15 над полем характеристики 3, показывающий, что в общем случае это ограничение снять нельзя. *А. И. Ширшов*

2132. Когомологии в алгебрах Ли. Хохшилд, Серр (Cohomology of Lie algebras. Hochschild G., Serre J.-P.), Ann. Math., 1953, **57**, № 3, 591—603 (англ.)

Пусть G — алгебра Ли над полем F, M — некоторый G-модуль (т. е. векторное пространство, в котором действует линейное представление φ алгебры G), $C^n(G, M)$ — группа n-линейных кососимметрических форм на G со значениями из M, наконец, $C(G, M)$ — прямая сумма групп $C^n(G, M)$. В группе $C(G, M)$ вводится дифференциал (существенно зависящий от представления φ). Соответствующая группа когомологий обозначается через $H(G, M)$. Каждая подалгебра K алгебры G сопоставляется с фильтрацией A_j группы $C(G, M)$. Именно: форма $f \in C^n(G, M)$ принадлежит A_j, если $n \geqslant j$ и f обращается в нуль при условии, что какие-нибудь

$n-j+1$ аргументов формы f принадлежат K. Исследуется спектральная последовательность E_r^{ij} ($r = 0, 1, 2, \ldots$) для этой фильтрации. В общем случае удается вычислить лишь члены E_0^{ij} и E_1^{ij}.

При вычислении следующего члена E_2^{ij} возникают значительные трудности, которые удается преодолеть только в двух частных случаях. Если K есть идеал алгебры G, то $H^n(K, M)$ можно естественно рассматривать как G/K-модуль и E_2^{ij} изоморфно $H^j(G/K, H^i(K, M))$. В качестве приложения этого результата строятся некоторые точные последовательности в случае, когда $H^n(K, M) = 0$ для первых значений n. Эти построения аналогичны построениям тех же авторов в более ранней работе (РЖМат, 1953, 600).

Член E_2^{ij} вычисляется также в случае, когда G есть конечномерная алгебра над полем характеристики нуль, K — ее редуктивная подалгебра (т. е. линейное представление K, действующее в пространстве G по формуле

$$\psi(K)\, g = [k, g], \qquad (k \in K,\ g \in G),$$

вполне приводимо) и M — конечномерный полупростой G-модуль (т. е. соответствующее ему линейное представление φ алгебры G вполне приводимо). В этом случае E_2^{ij} изоморфно $H^i(K, F) \otimes H^j(G, K, M)$, причем $Hj(G,K,M)$ обозначает группу когомологий G относительно K в смысле Шевалле-Эйленберга (Chevalley C., Eilenberg S., Trans. Amer. Math. Soc., 1948, **63**, 85—124). Если дополнительно предположить, что отвечающий вложению $K \subset G$ гомоморфизм $H^n(G, F)$ в $H^n(K, F)$ для всех $n \geqslant 0$ есть гомоморфизм на, то спектральная последовательность оказывается тривиальной, т. е. $E_2 = E_\infty$ (аналог известной теоремы тривиальности спектральной последовательности, отвечающей расслоенному пространству со слоем, вполне негомологичным нулю). Исследуется более подробно также случай, когда K есть идеал G и G/K полупроста. *Е. Б. Дынкин*

2133. О трехмерной группе когомологий алгебр Ли. Мори (On the threedimensional cohomology group of Lie algebras. Mori Mitsuya), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 2, 171—183 (англ.)

Развивается теория расширений алгебр Ли, аналогичная теории, построенной Эйленбергом и Маклейном для групп.

Пусть L — произвольная, Z — абелева алгебра Ли над полем F, а P — некоторое представление L в Z. L-ядром $(V, \mathfrak{p})$ называется пара, состоящая из алгебры Ли V с центром Z и гомоморфизма $\mathfrak{p}$ алгебры L в фактор-алгебру $D(V)/I(V)$ алгебры $D(V)$ дифференцирований V по алгебре $I(V)$ ее внутренних дифференцирований; при этом для любых элементов $x \in L$ и $c \in Z$ и любого дифференцирования $\sigma \in \mathfrak{p}(x)$ должно быть $\sigma c = P(x)\, c$. Пусть E — расширение алгебры V при помощи L, т. е. $E/V \approx L$. Внутренние дифференцирования алгебры E, порожденные элементами x из одного смежного класса по V, определяют на V дифференцирования, принадлежащие одному смежному классу $\mathfrak{p}(x)$ по идеалу $I(V)$. Мы получили гомоморфизм $\mathfrak{p}: L \to D(V)/I(V)$ и L-ядро $(V, \mathfrak{p})$. Все L-ядра этого типа называются расширяемыми. В последующем L, Z и P считаются фиксированными.

Пусть $(V_1, \mathfrak{p}^{(1)})$ и $(V_2, \mathfrak{p}^{(2)})$ — два L-ядра. В прямой сумме $V_1 + V_2$ алгебр V_1 и V_2 (автор называет прямую сумму прямым произведением и обозначает ее через $V_1 \times V_2$) элементы вида $(c, -c)$, где $c \in Z$, образуют идеал S. Пусть $V = V_1 + V_2/S$. Гомоморфизмы $\mathfrak{p}^{(1)}$ и $\mathfrak{p}^{(2)}$ естественным образом определяют гомоморфизм $\mathfrak{p}: V \to D(V)/I(V)$. Пара $(V, \mathfrak{p})$ является L-ядром и называется произведением данных L-ядер; оно обозначается через $(V_1, \mathfrak{p}^{(1)}) \otimes (V_2, \mathfrak{p}^{(2)})$.

Два L-ядра $(V, \mathfrak{p})$ и $(V', \mathfrak{p}')$ называются эквивалентными, если существует изоморфизм $\tau: V \approx V'$ над Z, для которого всегда $\tau\sigma_x\tau^{-1} \in \mathfrak{p}'(x)$. Эти ядра называются подобными, если существуют такие расширяемые L-ядра $(U, \mathfrak{q})$ и $(U', \mathfrak{q}')$, что L-ядра $(V, \mathfrak{p}) \otimes (U, \mathfrak{q})$ и $(V', \mathfrak{p}') \otimes (U', \mathfrak{q}')$ эквивалентны. Оказывается, что умножение L-ядер сохраняет классы подобия $\{(V, \mathfrak{p})\}$ и что относительно этого умножения классы образуют абелеву группу (аналог группы Брауэра). Единицей группы служит класс $\{(Z, P)\}$, а обратным для класса $\{(V, \mathfrak{p})\}$ является класс $(V^*, \mathfrak{p}^*)$, где алгебра V^* антиизоморфна алгебре V, а гомоморфизм $\mathfrak{p}^*$ соответствует $\mathfrak{p}$ в силу этого антиизоморфизма.

Пусть $(V, \mathfrak{p})$ — некоторое L-ядро. Оказывается, что существуют дифференцирования $\sigma_x \in \mathfrak{p}(x)$, линейно зависящие от $x \in L$. Для такого дифференцирования σ_x существует билинейная кососимметрическая функция $v(x, y) \in V$, $x, y \in L$, удовлетворяющая соотношению: $[\sigma_x, \sigma_y] - \sigma_{[x, y]} = \sigma_{v(x,y)}$.

Полагая $f(x, y, z) = \sigma_x v(y, z) + \sigma_y v(z, x) + \sigma_z v(x, y) + v([x, y], z) + v([y, z], x) + v([z, x], y)$, мы получим трехмерный Z-коцикл $f(x, y, z)$ алгебры V. Оказывается, что его класс когомологий $F(V, \mathfrak{p})$ не зависит от случайностей построения и однозначно определяется L-ядром $(V, \mathfrak{p})$. Этот класс тривиален тогда и только тогда, когда L-ядро $(V, \mathfrak{p})$ расширяемо. Класс произведения ядер равен сумме классов сомножителей. Таким образом, соответствие $(V, \mathfrak{p}) \to F(V, \mathfrak{p})$ порождает изоморфное отображение группы классов подобия L-ядер на некоторую подгруппу трехмерной группы когомологий $H^3(L, Z, P)$.

Автор рассматривает также связь между расширениями алгебры L с помощью данного расширяемого L-ядра $(V, \mathfrak{p})$ и двумерной группой когомологий $H^2(L, Z, P)$. Полученные здесь результаты аналогичны известным результатам теории групп. *М. М. Постников*

2134. К представлению многочленов над структурами. Шуфф (Zur Darstellung von Polynomen über Verbänden. Schuff Hans Konrad), Math. Nachr., 1954, **11**, № 1—2, 1—4 (нем.)

Один и тот же многочлен над структурой $\mathfrak{B}$ можно представить, вообще говоря, разными «формулами», составленными из элементов $\mathfrak{B}$ и заданных неизвестных. Возникает задача об отыскании способа, позволяющего выбрать для каждого многочлена ровно одну формулу в качестве его «нормального» представления. Реферируемая заметка содержит решение этой задачи (отмечается, что аналогичные проблемы для коммутативных колец и групп уже решены).

Пусть $\bigcup$, $\bigcap$ и $\leqslant$ суть соответственно операции и отношение частичной упорядоченности структуры $\mathfrak{B}$. Пусть $\{x_\nu\}$ — не пересекающееся с $\mathfrak{B}$ упорядоченное множество неизвестных. Индуктивно определяется множество формул: всякий элемент из $\mathfrak{B}+\{x_\nu\}$ есть формула, и всякое выражение вида $(F_1)\bigcup(F_2)$ или $(F_1)\bigcap(F_2)$, где F_1 и F_2 суть формулы, также есть формула. Из множества всех формул индуктивно выделяется подмножество $\mathfrak{H}$ так называемых «главных» формул, в котором индуктивно же вводится отношение частичной упорядоченности $\leqslant$, служащее продолжением отношения $\leqslant$ в $\mathfrak{B}$. Доказывается, что $\mathfrak{H}$ является надструктурой $\mathfrak{B}$. Основной результат состоит в том, что $\mathfrak{H}$ и есть структура многочленов от $\{x_\nu\}$ над $\mathfrak{B}$, т. е. каждый многочлен представляется ровно одной формулой из $\mathfrak{H}$. *В. А. Успенский*

2135. О взаимной связности элементов в структурах. Ноно (On the mutual connectedness of elements in lattices. N ô n o T a k a y u k i), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **17**, № 1, 1—9 (англ.)

Изучаются бинарные отношения γ в структуре L: $x\gamma y$. Если одновременно $x\gamma y$ и $y\gamma x$, то коротко пишут $x\rho y$. Элемент a структуры L называется ρ-неприводимым, если он не может быть представлен в виде $a=x\bigcup y$, $x\rho y$ и $x,\ y\neq a$.

Последнее понятие является обобщением понятия связного множества топологического пространства. На отношение γ по мере необходимости накладываются следующие условия:

(I) Если $z\leqslant x\bigcup y$ и $x\rho y$, то $(x\bigcup y)\bigcap z=(x\bigcap z)\bigcup(y\bigcap z)$.

(II) Если $x\gamma y$, $x_1\leqslant x$ и $y_1\leqslant y$, то $x_1\gamma y_1$.

(III_1) Если $x\gamma y_1$ и $x\gamma y_2$, то $x\gamma(y_1\bigcup y_2)$.

(III_2) Если $x_1\gamma y$ и $x_2\gamma y$, то $(x_1\bigcup x_2)\gamma y$.

(IV) Если $x\rho x$, то $x=0$.

(IV*) Если $x\leqslant y$ и $x\rho y$, то $x=0$.

Теорема сложения: Пусть в L выполнены условия (I) и (II); если множество A ρ-неприводимых элементов структуры L содержит такой элемент a_0, что $a_0\bar{\gamma}a$ для любого $a\in A$ ($\bar{\gamma}$ означает отрицание γ), то объединение $\bigcup_{a\in A}a$ (если оно существует) является ρ-неприводимым.

Теорема разложения: Пусть в L выполнены условия (I), (II), (III_1), (III_2) и (IV); если a, a_1, a_2, . . . , a_m — ρ-неприводимые элементы структуры L, причем $a=(a_1\bigcup a_2\bigcup\ldots\bigcup a_m)\bigcup(b_1\bigcup b_2\bigcup\ldots\bigcup b_n)$, $a_k\neq 0$, $b_i\neq 0$ и $b_i\rho b_j$ $(i\neq j)$, то элементы $a_1\bigcup a_2\bigcup\ldots\bigcup a_m\bigcup b_i$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ являются объединением m ρ-неприводимых элементов (не обязательно различных).

В последнем параграфе изучается связь между бинарным отношением γ и отображением $x\to x^\alpha$ в полной структуре L. Тогда и только тогда для бинарного отношения γ в L существует отображение $x\to x^\alpha$, для которого $x\gamma y$ эквивалентно $y\leqslant x^\alpha$, когда γ удовлетворяет условию:

(III_1*) Если $y\leqslant\bigcup_{x\gamma u}u$, то $x\gamma y$. В этом случае отображение однозначно определяется формулой $x\to x^\gamma=\bigcup_{x\gamma u}u$. Если в L выполнено условие (III_1^*) и $x\to x^\gamma$ такое отображение в L, что $x\gamma y$ эквивалентно $y\leqslant x^\gamma$, то: 1) Из $x_1\leqslant x$ следует $x_1^\gamma\geqslant x^\gamma$ тогда и только тогда, когда отношение γ удовлетворяет условию (II); 2) $(x_1\bigcup x_2)^\gamma\geqslant x_1^\gamma\bigcap x_2^\gamma$ тогда и только тогда, когда отношение γ удовлетворяет условию (III_2).

Аналогичные теоремы доказываются для бинарного отношения γ, удовлетворяющего условию: если $x\gamma y$, то $y\gamma x$.

Результаты, полученные в последнем параграфе, применяются к полным булевым алгебрам.

А. Х. Лившиц

2136. Свойства уплотнения Цассенхауза. Я н о ш Л ю д в и к, Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 2, 159—180 (резюме англ.)

В структуре рассматриваются пары цепей

$$a=a_0>a_1>\ldots>a_r=b, \tag{1}$$

$$a=b_0>b_1>\ldots>b_s=b. \tag{2}$$

Цепи $\{a_{i,j}\}$ и $\{b_{k,l}\}$, где $a_{i,j}=a_{i+1}\vee(a_i\wedge b_j)$, $i=0,1,2,\ldots,r-1$; $j=0,1,2,\ldots,s$; и $b_{k,l}=b_{k+1}\vee(b_k\wedge a_l)$, $k=0,1,2,\ldots,s-1$; $l=0,1,2,\ldots,r$, называются уплотнениями Цассенхауза цепей (1) и (2). Частным a/b называется множество всех таких x, для которых $b\leqslant x\leqslant a$. Частное a/b называется вниз прямо подобным частному c/d и обозначается $a/b\underset{d}{\sim}c/d$, если $a=b\vee c$; $d=b\wedge c$. Частные a/b и c/d называются снизу просто подобными и обозначаются $a/b\underset{j}{\sim}c/d$, если существует такое частное u/v, что $a/b\underset{d}{\sim}u/v\underset{d}{\sim}c/d$, где $u/v\underset{d}{\sim}c/d$ означает $c/d\underset{d}{\sim}u/v$. Цепи

$$a=x_0>x_1>\cdots>x_n=b, \tag{3}$$

$$a=y_0>y_1>\cdots>y_n=b \tag{4}$$

называются снизу просто подобными, если существует такая подстановка f чисел $i=0,1,2,\ldots,n-1$, что $x_i/x_{i+1}\underset{j}{\sim}y_j/y_{j+1}$, $j=f(i)$ для $i=0,1,2,\ldots,n-1$. Если цепи (3) и (4) являются уплотнениями цепей (1) и (2) и снизу просто подобны, то они называются уплотнениями Шрейера.

Для того чтобы в дедекиндовой структуре (или в группе с композиционным рядом) построение Цассенхауза не приводило к собственному уплотнению двух данных (для группы — и нормальных) цепей, необходимо и достаточно, чтобы эти цепи были снизу просто подобны.

Если в дедекиндовой структуре уплотнение Цассенхауза двух данных цепей имеет длину n, а произвольное уплотнение Шрейера этих же цепей имеет длину m, то $n\leqslant m$. Следовательно, уплотнение Цассенхауза двух данных цепей в дедекиндовой структуре является их минимальным уплотнением Шрейера. Приводится пример, показывающий, что может существовать уплотнение Шрейера длины n, отличное от уплотнения Цассенхауза. В дедекиндовой структуре уплотнение Цассенхауза двух данных цепей является единственным уплотнением Шрейера, лежащим в подструктуре, порожденной этими цепями. *А. Х. Лившиц*

2137. Условия семимодулярности в структурах. Витнер Честмир, Чехосл. матем. ж., 1953, **3**, № 3, 265—282 (резюме англ.)

В структуре S выполняется нижнее условие простых частных, если из $a/b \underset{d}{\sim} c/d$ и простоты частного a/b следует, что и частное c/d просто (определение понятий частного и прямого подобия см. в реф. 2136; частное a/b называется простым, если не существует элементов между a и b). В структуре S выполняется нижнее условие насыщенных цепей, если из $a/b \underset{d}{\sim} c/d$ и насыщенности цепи $\{a_i\}$ между a и b (т. е. эта цепь не обладает собственными уплотнениями) следует, что цепь $\{c_i\}$, $c_i = a_i \wedge c$, между элементами c и d также насыщена. Верхние условия простых частных и насыщенных цепей определяются дуально. Элемент x структуры S называется γ-дедекиндовым относительно элементов b и c, если из $x \geqslant b$ следует $x \wedge (c \vee b) = (x \wedge c) \vee b$. Элемент y структуры S называется β-дедекиндовым относительно элементов b и c, если из $b \geqslant y$ следует $b \wedge (c \vee y) = (b \wedge c) \vee y$.

Пусть $a/b \underset{d}{\sim} c/d$ и $\{a_i\}$ — насыщенная цепь между a и b. Множество всех элементов цепи $\{a_i\}$, не являющихся γ-дедекиндовыми осносительно b и c, обозначается через K_d. При помощи β-дедекиндовости определяется множество $K_h \subset \{d_i\}$, где $\{d_i\}$ является насыщенной цепью между c и d. По определению, в структуре S тогда и только тогда выполняется условие γ, когда для любых двух частных $a/b \underset{d}{\sim} c/d$ и для любой насыщенной цепи $\{a_i\}$ между a и b множество K_d либо пусто, либо обладает максимальным элементом; при помощи множества K_h дуально определяется условие β.

Если в структуре S одновременно выполняются условие γ и нижнее условие насыщенных цепей, то говорят, что в S выполняется нижнее условие семимодулярности (обозначается π_1), а структура называется семимодулярной снизу. Если в структуре S одновременно выполняются условие β и верхнее условие насыщенных цепей, то говорят, что в структуре S выполняется верхнее условие семимодулярности (обозначается π_2), а структура S называется семимодулярной сверху. Доказывается, что условия π_1 и π_2 дают решение проблемы, поставленной Коржинеком, т. е. они обладают следующими свойствами:

I. Условия π_1 и π_2 взаимно дуальны.

II. В произвольной структуре из условия π_1 следует нижнее условие простых частных, а из условия π_2 — верхнее условие простых частных.

III. Для структур, все цепи которых конечны, условие π_1 эквивалентно нижнему условию простых частных, а условие π_2 — верхнему условию простых частных.

IV. Структура дедекиндова тогда и только тогда, когда одновременно выполняются условия π_1 и π_2.

Если структура S обладает условием максимальности или условием минимальности для цепей, то нижнее и верхнее условия насыщенных цепей обладают свойствами I, II, III, IV. Даются также условия, обладающие свойствами I, II и IV, но не обладающие свойствами III.

Приводятся примеры структур, в которых: 1) выполняются условия γ, β, но не выполняются условия насыщенных цепей, 2) выполняются все условия; 3) не выполняются ни условия γ, β, ни условия насыщенных цепей; 4) выполняются условия насыщенных цепей, но не выполняются условия γ, β; 5) выполняется условие максимальности для цепей и верхнее и нижнее условия простых частных, но не выполняется верхнее условие насыщенных цепей.

Пусть R_1 и R_2 — две насыщенные цепи между элементами a и b, $a > b$, структуры S. Выберем в R_1 конечную цепь $a > a_1 > a_2 > \cdots > a_r = b$, а в R_2 — конечную цепь $a > a_1' > a_2' > \cdots > a_s' = b$; если в R_1 и R_2 существуют конечные снизу просто подобные уплотнения этих цепей (определение см. реф. 2136), то говорят, что в структуре S справедлива теорема Шрейера с нижним простым подобием частных. Дуально формулируется теорема Шрейера с верхним простым подобием частных. Приводится пример структуры, в которой выполнено нижнее условие семимодулярности, но не имеет места теорема Шрейера с нижним простым подобием частных. Доказывается, что если в структуре S справедлива теорема Шрейера с нижним простым подобием частных, то в ней выполнено нижнее условие насыщенных цепей.

А. Х. Лившиц

2138. Расширение структур с мерой. Каппос (Erweiterung von Maßverbänden. Kappos Demetrios A.), J. reine und angew. Math., 1953, **191**, № 1/2, 97—109 (нем.)

Мерой $\mu(a)$ булева кольца $\mathfrak{A}$, $a \in \mathfrak{A}$, называется однозначная действительная функция, определенная на $\mathfrak{A}$ и обладающая следующими свойствами: 1) $\mu(a) \geqslant 0$, $\mu(a) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$; 2) $\mu(e) = 1$, где e — единица кольца $\mathfrak{A}$; 3) $\mu(a \cup b) = \mu(a) + \mu(b)$, если $ab = 0$, $a, b \in \mathfrak{A}$. Булево кольцо $\mathfrak{A}$ с мерой $\mu(a)$ называется структурой с мерой $(\mathfrak{A}, \mu)$. Мера μ непрерывна на $\mathfrak{A}$, если из $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = 0$, $a_n \geqslant a_{n+1}$, $a_n \in \mathfrak{A}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, следует $\lim \mu(a_n) = 0$. Пусть $\mathfrak{A}$ — булево подкольцо булева кольца $\mathfrak{B}$; $\mathfrak{A}$ называется σ-регулярным относительно $\mathfrak{B}$, если из существования $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \in \mathfrak{A}$, следует $(\mathfrak{A}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n = (\mathfrak{B}) \bigcap_{n=1}^{\infty} a_n$. Если $(\mathfrak{A}, \mu)$ — подструктура с мерой структуры с мерой $(\mathfrak{B}, \mu)$, причем μ непрерывна на $\mathfrak{B}$, то непрерывность μ на $\mathfrak{A}$ эквивалентна σ-регулярности $\mathfrak{A}$ относительно $\mathfrak{B}$.

σ-структура (т. е. такая структура, в которой существуют сумма и произведение любого не более чем счетного множества элементов) с мерой $(\mathfrak{B}, \nu)$ называется σ-расширением структуры с мерой $(\mathfrak{A}, \mu)$, если в $(\mathfrak{B}, \nu)$ существует подструктура $(\mathfrak{B}_0, \nu)$, обладающая следующими свойствами: 1) $(\mathfrak{B}_0, \nu)$ изометрична $(\mathfrak{A}, \mu)$; 2) $\mathfrak{B}_0$ является σ-порождающим базисом структуры $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathfrak{B} = R_\sigma(\mathfrak{B}_0)$. В множестве $\mathfrak{M}$ всех μ-фундаментальных последовательностей структуры с мерой $\mathfrak{A}$ обычным способом вводятся операции сложения и умножения, относительно которых $\mathfrak{M}$ являтся булевым кольцом. Строится фактор-кольцо $\mathfrak{B}^*$ кольца $\mathfrak{M}$ по идеалу $\mathfrak{N}$, состоящему из всех последовательностей, сходящихся к нулю. Доказывается, что в $\mathfrak{B}^*$ можно так ввести меру $\hat{\mu}$, что $(\mathfrak{B}^*, \hat{\mu})$ будет σ-структурой с мерой, являющейся σ-расширением структуры с мерой $(\mathfrak{A}, \mu)$. Все σ-расширения структуры с мерой $(\mathfrak{A}, \mu)$ изометричны между собой.

Рассматривается прямое произведение $(B, \mu) = \underset{i \in I}{P}(\mathfrak{B}_i, \mu_i)$ структур с мерой $(\mathfrak{B}_i, \mu_i)$, $i \in I$, являющееся структурой с мерой.

Если $(\mathfrak{B}_j, \hat{\mu}_j)$ есть σ-расширение $(\mathfrak{B}_j, \mu_j)$, а $(\hat{B}^*, \hat{\mu}) = \overline{\underset{i \in I}{P}}(\mathfrak{B}_i, \hat{\mu}_i)$ есть σ-произведение всех $(\mathfrak{B}_i, \hat{\mu}_i)$, то $(\hat{B}^*, \hat{\mu})$ изометрична σ-расширению $(\hat{B}, \hat{\mu})$ структуры с мерой (B, μ).

В последнем параграфе для изучения σ-расширений и прямых произведений булевых колец применяется изоморфное представление последних телами множеств, состоящих из подмножеств основного множества всех простых идеалов этих колец.

А. Х. Лившиц

2139. О вложении структуроидов и структур. Соркин Ю. И., Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 5, 931—934

Рассматривается следующая система аксиом Σ структуроида (неполной структуры в смысле Ивенса):

$I_\cup$) $a \cup a = a$;	$I_\cap$) $a \cap a = a$;
$A_\cup$) $a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$;	$A_\cap$) $a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$.
$K_\cup$) $a \cup b = b \cup a$,	$K_\cap$) $a \cap b = b \cap a$,
$C^1_\cup$) $a \cup (a \cap b) = a$,	$C^1_\cap$) $a \cap (a \cup b) = a$,
$C^2_\cup$) $(a \cap b) \cup a = a$,	$C^2_\cap$) $(a \cup b) \cap a = a$,
$C^3_\cup$) $a \cup (b \cap a) = a$	$C^3_\cap$) $a \cap (b \cup a) = a$,
$C^4_\cup$) $(b \cap a) \cup a = a$,	$C^4_\cap$) $(b \cup a) \cap a = a$,

и доказывается, что системы

$$\begin{pmatrix} I_* & A_\cup K_\cup C^i_\cup \\ & A_\cap K_\cap C^j_\cap \end{pmatrix}; \qquad i, j = 1, 2, 3, 4$$

(где $*$ означает произвольную операцию $\cup$ или $\cap$) являются полными и минимальными для структуроидов. Этими подсистемами исчерпываются все полные минимальные подсистемы системы аксиом Σ для структуроидов. Если в структуроиде R положить $a \geqslant b$ в том и только том случае, когда $a \cup b$ определено и равно a, то R становится частично упорядоченным множеством относительно соотношения $\geqslant$.

Структуроидизацией частично упорядоченного множества P называется определение на нем двух таких частичных бинарных операций $\cup$ и $\cap$, удовлетворяющих аксиомам Σ, чтобы соотношения $a \geqslant b$ в P выполнялись тогда и только тогда, когда $a \cup b = a$ в структуроиде. Множество структуроидизаций частично упорядоченного множества P составляют полную структуру.

Всякий структуроид R вложим в полную структуру $L(R)$. Отсюда, в силу теоремы Ивенса (Evans T., J. London Math. Soc., 1951, **26**, ч. 1, № 101, 64), следует, что проблема тождества в структурах разрешима. Всякий счетный структуроид R вложим в структуроид S с тремя образующими. Приводятся следующие следствия последнего утверждения: 1) всякая счетная структура изоморфна подструктуре структуры с тремя образующими; 2) всякая конечная структура изоморфна подструктуре конечной структуры с тремя образующими; 3) свободная структура со счетным множеством свободных образующих изоморфна подструктуре свободной структуры с тремя образующими (Whitman P. M., Ann. Math., 1942, **43**, 105). *А. Х. Лившиц*

2140. К теории косых структур. Йордан, Витт (Zur Theorie der Schrägverbände. Jordan Pascual, Witt Ernst), Acad. Wiss. und Lit., 1953, № 5, 225—232 (нем.)

Косой структурой называется множество с двумя ассоциативными бинарными операциями $\vee$ и $\wedge$, удовлетворяющими тождеству $(a \wedge b) \vee a = a \wedge (b \vee a) = a$. Косые структуры, в которых выполняются тождества

$$[(c \wedge b) \vee a] \wedge (b \vee c) = (c \wedge b) \vee [a \wedge (b \vee c)], \quad (1)$$
$$(b \wedge a) \vee a = a \wedge (a \vee b) = a, \quad (2)$$

являются обобщением дедекиндовых структур. Следствием из этих аксиом являются следующие

$$a \wedge b \wedge a = a \wedge b, \qquad a \vee b \vee a = b \vee a. \quad (3)$$

Все приведенные аксиомы дуальны — они переходят в себя, если поменять местами знак $\vee$ и $\wedge$ и заменить порядок следования элементов на обратный. В частности, если положить $a \wedge b = b \vee a = a$, то все аксиомы будут выполнены. Такая косая структура называется гнездом.

Дается новая конструкция косых структур. Пусть задана структура $\mathfrak{A}$ и каждому ее элементу a поставлено в соответствие два элемента fa и Fa, причем

$$ffa = fa \subseteq a \subseteq Fa = FFa,$$
$$f(a \cup b) = fa \cup fb,$$
$$F(a \cap b) = Fa \cap Fb,$$

откуда следует, что $fa \subseteq fb$ и $Fa \subseteq Fb$, если $a \subseteq b$.

В $\mathfrak{A}$ определяются новые бинарные операции $\vee$, $\wedge$: $a \vee b = fa \cup b$, $b \wedge a = b \cap Fa$. Тогда элементы из $\mathfrak{A}$ по отношению к этим операциям $\vee$ и $\wedge$ образуют косую структуру $\mathfrak{M}$, в которой выполняются аксиомы (3). Аксиома (2) выполняется в $\mathfrak{M}$ в том и только в том случае, если $fFa \subseteq a \subseteq Ffa$. Если структура $\mathfrak{A}$ дедекиндова, то в $\mathfrak{M}$ выполняется аксиома (1).

Пусть теперь $\mathfrak{X}$ — множество элементов $x_1, x_2, \ldots$, причем для некоторых пар x_1, x_2 произвольным образом установлены соотношения $x_1 < x_2$ или $x_2 < x_1$. Рассматриваются изотонные отображения $a(x)$ (если $x < y$, то $a(x) \subseteq a(y)$) множества $\mathfrak{X}$ в некоторую структуру $\mathfrak{B}$. Эти отображения образуют структуру, если положить $(a \cup b)(x) = a(x) \cup b(x)$, $(a \cap b)(x) = a(x) \cap b(x)$. Пусть далее $\varphi(x)$ и $\Phi(x)$ — два изотонных отображения множества $\mathfrak{X}$ на себя, причем $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x) \leqslant x \leqslant \Phi(x) = \Phi(\Phi(x))$.

Тогда в $\mathfrak{A}$ определяем функции f и F: $(fa)(x) = a(\varphi(x))$; $(Fa)(x) = a(\Phi(x))$. Проведя описанную выше конструкцию для этих функций f и F, мы получим соответствующую косую структуру. Приводятся примеры, показывающие, что конструкции I и II, данные одним из авторов ранее (РЖМат, 1954, 3263), являются частными случаями этой конструкции.

В косой структуре можно ввести понятие включения четырьмя различными способами, в зависи-

мости от исходного тождества $b \vee a = b$, $a \wedge b = a$, $b \wedge a = a$ или $a \vee b = b$. Все эти понятия включения рефлексивны и транзитивны. Если элементы a, b образуют гнездо и элементы a, c образуют гнездо, то и элементы a, b, c образуют гнездо.

А. Х. Лившиц

2141 К. Локальная алгебра. Самюэль (Algèbre locale. Samuel P. (Fasc. 123 du Mémorial des sciences mathématiques), 76 pp., вып. 98, Paris, Gauthier-Villars, 1953, 950 fr.) (франц.)

Обзор теории локальных колец и некоторых примыкающих сюда алгебраических теорий. Доказательства наиболее элементарных теорем лишь намечены, доказательства остальных теорем проведены полностью. Применения теории локальных колец к вопросам алгебраической геометрии лишь иногда упоминаются.

Содержание распределяется по главам следующим образом:

В первой главе собраны результаты общего характера, относящиеся к коммутативным кольцам, топологизированным с помощью системы степеней некоторого идеала (эти степени образуют систему окрестностей нуля). В частности, дается построение пополнений этих колец, колец частных и изучается структура конечных расширений полных колец. Основные результаты относятся к случаю, когда в рассматриваемом кольце имеет место условие обрыва возрастающих цепочек идеалов.

Вторая глава содержит изложение принадлежащей Самюэлю теории характеристических многочленов и ее применений к теории размерности локальных колец и к теории кратностей идеалов.

Третья глава посвящена теории геометрических локальных колец. В основном излагаются результаты, полученные Шевалле. Однако доказательства проводятся с помощью теорем о характеристических многочленах.

В четвертой главе доказывается теорема Коэна, дающая полное описание структуры полных локальных колец. Излагаемое доказательство следует идее первоначального доказательства Коэна.

Пятая глава содержит изложение результатов, относящихся к целозамкнутым локальным кольцам и к локальным кольцам, в которых имеет место однозначность разложения на множители.

Шестая глава состоит из трех не связанных друг с другом параграфов, посвященных тензорным произведениям, топологическим подпространствам колец и общему вопросу перехода от локальных свойств колец к свойствам в целом. Последний из этих параграфов является, в некотором смысле, ключом всей книги, так как основная цель построения теории локальных колец как раз и состоит в использовании более простых свойств локальных колец для изучения строения колец возможно более общего типа.

В конце книги приведен полный список работ, появившихся до 1953 г., по вопросам, связанным с локальными кольцами. *А. И. Узков*

См. также: 2055, 2070 Д, 2074, 2085, 2086, 2096, 2097, 2151, 2172, 2179, 2180, 2307, 2327, 2369, 2375

ТОПОЛОГИЯ

2142. Некоторые замечания о непрерывных отображениях. Кли, Уц (Some remarks on continuous transformations. Klee V. L., Utz W. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 2, 182—184 (англ.)

В статье рассматривается однозначное отображение f метрического пространства M на метрическое пространство fM и ставится вопрос, при выполнении каких из нижеследующих условий это отображение является непрерывным: 1) множество fX бикомпактно для всякого бикомпактного множества $X \subset M$; 2) Множество fY связно для всякого связного множества $Y \subset M$; 3) прообраз $f^{-1}q$ всякой точки $q \in fM$ есть замкнутое множество; 4) каковы бы ни были точка $q \in fM$ и положительное число ε, прообраз множества всех точек пространства fM, удаленных от точки q на расстояние ε, есть множество замкнутое.

Автор доказывает, например, следующие теоремы:

А) Всякое отображение, удовлетворяющее условиям 1) и 3), непрерывно; В) если пространство M локально связно в точке p, то всякое отображение, удовлетворяющее условиям 1) и 2), непрерывно в точке p. Если M не является локально связным в точке p, то существует действительная функция, удовлетворяющая условиям 1) и 2), которая оказывается разрывной в точке p. *А. С. Пархоменко*

2143. Минимальное число неподвижных точек в бесконечных полиэдрах. Вейер (Fixpunktmindestzahlen in unendlichen Polyedern. Weier Josef), Math. Ann., 1954, **127**, № 4, 319—339 (нем.)

Комплекс K называется локально одномерно связным, если связно любое множество вида $\overline{L} \setminus a$, где a—вершина комплекса K, а $\overline{L}$ — замыкание ее звезды. Основной результат работы состоит в следующем. Пусть K — бесконечный, локально конечный, связный и локально одномерно связный симплициальный комплекс, расположенный в евклидовом пространстве R^m, $\overline{K}$ — соответствующий полиэдр, а f — непрерывное отображение полиэдра $\overline{K}$ в себя; тогда существует отображение f^* полиэдра $\overline{K}$ в себя, гомотопное f и не имеющее неподвижных точек. Для доказательства автор устанавливает сначала, что отображение f можно перевести малой деформацией в такое отображение f', аффинное на каждом симплексе комплекса K, которое имеет неподвижные точки лишь в основных (не подчиненных другим) симплексах комплекса K, причем не более одной неподвижной точки в каждом симплексе. После построения отображения f' автор применяет следующую теорему о сдвиге неподвижной точки: Пусть x и y — симплексы комплекса K, причем $\dim(\overline{x} \cap \overline{y}) \geqslant 1$, $\overline{x}$ содержит неподвижную точку отображения f', а $\overline{y}$ неподвижных точек не содержит; тогда существует деформация f_t', $f_0' = f'$ не меняющая f' на $K \setminus \overline{L}$, где $\overline{L}$ — замыкание звезды симплекса $\overline{x} \cap \overline{y}$

в комплексе K, причем f_1' имеет на $\bar{L}$ одну неподвижную точку внутри y.

Представив K в виде специальной суммы расширяющихся конечных комплексов и многократно применяя теорему о сдвиге неподвижной точки, автор получает (после перехода к пределу) отображение f^*, удовлетворяющее условиям основной теоремы.

В последнем разделе показано, как получить все построенные отображения с помощью малых деформаций. Отсюда следует, в частности, существование непрерывного векторного поля без особенностей на всяком открытом дифференцируемом n-мерном многообразии. *А. Л. Лунц*

2144. Нормальные семейства отображений. Вейер (Normale Abbildungsscharen. Weier Josef), Math. Z., 1954, **59**, 356—374 (нем.)

Изучаются неподвижные точки отображений, близких к тождественному. Пусть K — симплициальный комплекс, обладающий тем свойством, что никакая его вершина не разбивает своей окрестности, а P — соответствующий полиэдр. Через j обозначим тождественное отображение полиэдра P на себя. Автор доказывает, что существуют такие пути q_i^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, m$, и такое семейство f^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, непрерывных отображений, которые обладают следующими свойствами: 1) $f^0 = f$; 2) точки q_i^τ, и только они, являются неподвижными точками отображения f^τ, $0 < \tau < 1$; 3) все точки q_i^1, $i = 1, \ldots, m$, совпадают между собой, и эта точка является единственной неподвижной точкой отображения f^1. Деформации подобного рода автор называет «нормальными семействами отображений». При доказательстве сформулированной теоремы устанавливается ряд вспомогательных предложений, из которых отметим следующее:

Пусть V — открытый шар евклидова пространства R, S — его граница. Пусть далее $q, q_1, \ldots, q_m$ — попарно различные точки из V и $q_1^\tau = (1-\tau)\, q + \tau q_i$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, $i = 1, \ldots, m$. Пусть, наконец, f^0 и f^1 — два отображения шара $\bar{V}$ в R, совпадающие на S и обладающие тем свойством, что q есть единственная неподвижная точка отображения f^0, а $q_1, \ldots, q_m$ — все неподвижные точки отображения f^1. Тогда существует такая деформация f^τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, соединяющая отображения f^0 и f^1, что: 1) $f^\tau = f$ на сфере S, 2) точки $q_1^\tau, \ldots, q_m^\tau$, и только они, являются неподвижными точками отображения f^τ.

Автор замечает, что аналогичные исследования нетрудно провести также для произвольных классов отображений (а не только для тождественного), для чего следует несколько изменить предположения, сделанные о комплексе K. *В. Г. Болтянский*

2145. Одна теорема о неподвижных точках. Борсук К., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 1, 15—18

В статье приведены следующие результаты:

Теорема 1. Пусть A — ациклическая кривая, каждые две точки которой могут быть соединены простой дугой. Тогда всякое непрерывное отображение f кривой A в себя имеет неподвижную точку.

Континуум C называется уникогерентным, если для любых двух континуумов C_1 и C_2, удовлетворяющих условию $C = C_1 \cup C_2$, множество $C_1 \cap C_2$ есть континуум. Континуум C называется наследственно уникогерентным, если всякий содержащийся в нем континуум уникогерентен. Отметив, что всякая ациклическая кривая наследственно уникогерентна, автор сводит доказательство теоремы 1 к доказательству следующей теоремы.

Теорема 2. Всякое непрерывное отображение в себя наследственно уникогерентной кривой, любые две точки которой могут быть соединены простой дугой, имеет неподвижную точку.

Следствие. Если A — одномерный компакт, стягиваемый по себе в точку, то для всякого непрерывного отображения компакта A в себя существует неподвижная точка. *А. С. Пархоменко*

2146. О квазипереносах в E^n. Терасака (On quasi-translations in E^n. Terasaka Hidetaka), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 2, 80—84 (англ.)

Под квазипереносом понимается сохраняющее ориентацию топологическое отображение f евклидова пространства E^n на себя, обладающее тем свойством, что для всякого ограниченного множества M система множеств $f^n(M)$, где f^n есть n-я итерация отображения f, имеет пустой верхний топологический предел при $n \to \pm\infty$.

По теореме Керекьярто-Шпернера, квазиперенос плоскости топологически эквивалентен обычному параллельному переносу. Вопрос о том, распространяется ли это утверждение на евклидовы пространства размерности $\geqslant 3$, остается открытым.

В статье доказывается следующая теорема, из которой вытекает теорема Керекьярто-Шпернера:

Теорема 1. Пусть f — квазиперенос в E^n. Тогда существует такой бесконечный полиэдр π, что если обозначить через D область, ограниченную множествами π и $f(\pi)$, то для любых двух различных целых чисел m и n множества $f^m(D)$ и $f^n(D)$ не имеют общих точек и

$$\bigcup_{n=-\infty}^{\infty} f^n(\bar{D}) = E^n.$$

Теорема доказывается в несколько иной формулировке, относящейся к сфере S^n. *А. С. Пархоменко*

2147. Новые соотношения двойственности для незамкнутых множеств. Ситников К., Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 5, 925—928

Доказывается прежде всего, что классические Δ-группы $\Delta_c^p A$ (с компактными носителями) любого множества $A \subset S^n$ дуализируемы, т. е. что они выражаются через топологические инварианты дополнительного множества $B = S^n \setminus A$. Группа $\Delta_c^p A$ есть фактор-группа группы всех p-мерных компактных (виеторисовских) циклов множества A по подгруппе ограничивающих циклов. При этом виеторисовский цикл множества A есть по определению виеторисовский цикл, лежащий на каком-нибудь компакте $\psi \subseteq A$; он ограничивает в A, если он ограничивает на каком-либо компакте ψ', $\psi \subseteq \psi' \subseteq A$. Эта теорема, представляющая собою решение задачи, поставленной референтом еще в 1935 г. получается как звено в цепи новых соотношений двойст-

венности, касающихся различных групп, характеризующих гомологическую структуру множества. Прежде всего в группе $\nabla^p(A, \mathfrak{A})$ (т. е. в ∇-группе, основанной на бесконечных цепях, лежащих на бесконечных звездно-конечных покрытиях множества A по дискретной области коэффициентов $\mathfrak{A}$) выделяется подгруппа $N^p_\nabla(A, \mathfrak{A})$, состоящая из ∇-классов, содержащих хотя бы один ∇-цикл, имеющий нулевое скалярное произведение со всяким p-мерным конечным Δ-циклом того нерва, на котором лежит данный ∇-цикл (с коэффициентами из группы $\mathfrak{B}|\mathfrak{A}$).

Имеет место следующий второй закон двойственности Ситникова (о первом см. РЖМат, 1954, 4769). Пусть M^n — замкнутое n-мерное гомологическое многообразие, p и q — два неотрицательных числа, дающих в сумме $n-1$.

Предполагаем, что M^n ациклично в размерностях q и $q+1$ по данной произвольной группе коэффициентов $\mathfrak{G}$. Пусть A и $B = M^n \setminus A$ — два взаимно дополнительных множества в M^n. Тогда группа $\Delta^q_c B$ изоморфна фактор-группе $\nabla^p A - N^p_\nabla A$ (область коэффициентов — группа $\mathfrak{G}$).

Первый ситниковский закон двойственности утверждает наличие определенного естественного изоморфизма M между группой $\nabla^p A$ и группой $\Delta^q B$ (ситниковская Δ-группа, основанная на ситниковских «сильных» циклах и гомологиях; см. РЖМат, 1954, 4769). При этом группа $\Delta^q_c B$ изоморфна фактор-группе $\Delta^q B - H^q B$, где $H^q B$ состоит из гомологических классов тех ситниковских циклов, которые гомологичны нулю в «слабом», виеторисовском смысле.

Группа $N^p_\nabla(A, \mathfrak{B})$ определяется иначе, чем для дискретной области коэффициентов, а именно как подгруппа группы $\nabla^p(A, \mathfrak{B})$, состоящая из всех элементов, имеющих нулевое скалярное произведение со всяким проекционным циклом в смысле референта (см. РЖМат, 1954, 4769).

Наконец, если в группе $\nabla^p A$ (по любой области коэффициентов) взять все элементы, имеющие нулевое скалярное произведение со всяким p-мерным компактным проекционным циклом (по двойственной области коэффициентов) или, что то же, со всяким виеторисовским циклом, то получится группа $N^p_{\nabla c} A \supset N^p_\nabla A$ (определена одинаково для всех областей коэффициентов).

Группа $\Delta^p(A, \mathfrak{B})$ содержит две группы незацепляемости: $N^p_{\Delta c}(A, \mathfrak{B})$ и $N^p_\Delta(A, \mathfrak{B})$, состоящие из элементов, имеющих нулевой коэффициент зацепления со всяким компактным, соответственно со всяким проекционным циклом множества B. При этом, как доказано референтом, группа $N^p_{\Delta c}(A, \mathfrak{B})$ может быть определена как состоящая из гомологических классов тех циклов, которые гомологичны нулю во всякой окрестности множества A. Так же определяется и группа $N^p_{\Delta c}(A, \mathfrak{A})$. Все эти группы являются топологическими инвариантами тех множеств, для которых они определяются.

Оказывается — и в этом состоит теорема Ситникова об изоморфизме двойственности — существует «естественный» изоморфизм между группами $\nabla^p A$ и $\Delta^q B$, при котором группы $N^p_{\nabla c} A \supseteq N^p_\nabla A$ отображаются соответственно на группы $N^q_{\Delta c} B \supseteq H^q B$.

Второй закон двойственности Ситникова может быть записан также в виде двойственности $\Delta^p_c(A, \mathfrak{A}) \mid \overline{\delta}^q(B, \mathfrak{B})$, где группа $\overline{\delta}^q(B, \mathfrak{B})$ определяется следующим образом. На каждом бесконечном звездно-конечном покрытии α множества B берем группу $\Delta^q(\alpha, \mathfrak{B})$, основанную на конечных цепях, и в ней подгруппу $N^q_\Delta \alpha$, состоящую из элементов, имеющих нулевое скалярное произведение со всеми $\zeta \in \nabla^q(\alpha, \mathfrak{A})$. Бикомпактное пополнение $\overline{\delta}(\alpha, \mathfrak{B})$ группы $\Delta^q(\alpha, \mathfrak{B}) - N^q_\Delta \alpha$ существует и двойственно группе $\nabla^p(\alpha, \mathfrak{A}) - N^q_\nabla(\alpha, \mathfrak{A})$. Бикомпактная предельная группа обратного спектра групп $\overline{\delta}^q(\alpha, \mathfrak{B})$ обозначается через $\overline{\delta}^q(B, \mathfrak{B})$.

Группа $H^q(A, \mathfrak{A})$ является группой незацепляемости — в группе $\Delta^q(A, \mathfrak{A})$ — элементами группы $\overline{\delta}^q(B, \mathfrak{B})$. При естественных гомоморфизмах группы Δ в δ (по дискретной области коэффициентов) и в $\overline{\delta}$ (по бикомпактной области коэффициентов) ядрами являются группы $N_{\Delta c}$ по соответственной области коэффициентов. Это подтверждает тот факт, что группа $\overline{\delta}$ по бикомпактной области коэффициентов является аналогом группы δ по дискретной области. Все определенные выше группы могут быть расположены в следующую центрально-симметрическую таблицу, в которой слева — бикомпактная область коэффициентов, а справа — дискретная:

$$\begin{array}{cc} & \overset{\delta^q B}{\uparrow} \\ N^q_\nabla B \subseteq N^q_{\nabla c} B \subseteq \nabla^q B & \Delta^q B \supseteq N^q_{\Delta c} B \supseteq H^q B \\ N^p_\Delta A \subseteq N^p_{\Delta c} A \subseteq \Delta^p A & \nabla^p A \supseteq N^p_{\nabla c} A \supseteq \nabla^p_\nabla A \\ \underset{\overline{\delta}^p A}{\downarrow} & \end{array}$$

Группы, стоящие на одной вертикали, изоморфны между собою (только группы δ и $\overline{\delta}$ не участвуют в этих изоморфизмах). Кроме того, в таблице имеются «горизонтальные двойственности»

$$\overline{\nabla^q B - N^q_\nabla B} \mid \delta^q B; \quad \overline{\nabla^q B - N^q_{\nabla c} B} \mid (\Delta^q B - N^q_{\Delta c} B);$$

$$\overline{\delta}^p A \mid (\nabla^p A - N^p_\nabla A),$$

в которых горизонтальная черта означает переход к бикомпактному пополнению. Основной результат заключается в том, что все четырнадцать групп, входящих в эту таблицу (а также всевозможные их фактор-группы), дуализируемы.

Прореферированные результаты дают возможность получить простую инвариантную характеристику максимальной элементарной области двойственности в смысле референта, т. е. совокупности всех множеств, лежащих во всевозможных S^n, для которых при любых $\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B}$ имеем понтрягинские двойственности

$$\Delta^p_c(A, \mathfrak{A}) \mid \Delta^q_c(B, \mathfrak{B}), \tag{1}$$

$$\Delta^p_c(A, \mathfrak{B}) \mid \Delta^q_c(B, \mathfrak{A}) \tag{2}$$

(группы по $\mathfrak{B}$ берутся в надлежащей топологии).

Множества, удовлетворяющие соотношению (1), называются квазиоткрытыми; их инвариантная характеристика дана в указанном выше реф. 4769. Множества, для которых имеет место двойственность (2), называются квазизамкнутыми; они характеризуются тем, что для них естественный гомоморфизм группы $\Delta_c^p(A, \mathfrak{B})$ в группу $\overline{\delta}^p(A, \mathfrak{B})$ есть изоморфизм на всю эту группу. Максимальная область двойственности совпадает с совокупностью всех множеств, являющихся одновременно квазиоткрытыми и квазизамкнутыми. *П. С. Александров*

2148. О некоторых следствиях второго закона двойственности Ситникова. Александров П. С., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 5, 885—887

Закон двойственности автора, доказанный им в его работе «Основные теоремы двойственности для незамкнутых множеств» (Матем. сб., 1947, 21, 161—232), утверждает двойственность зацепления $\delta^p(A, \mathfrak{A}) \mid \overline{\Delta}^q(B, \mathfrak{B})$ для любых двух взаимно дополнительных множеств A и B в S^n. Здесь $\delta^p A$ есть так называемая проекционная Δ-группа автора, основанная на рассмотрении бесконечных звездно-конечных покрытий множества и конечных цепей на этих покрытиях. Группа $\overline{\Delta}^q(B, \mathfrak{B})$ есть бикомпактная группа Δ-типа, основанная на компактных циклах и компактных гомологиях.

Бикомпактная группа Δ-типа, основанная на (бесконечных) покрытиях, впервые построена в работе референта, где доказана двойственность $\Delta_c^p(A, \mathfrak{A}) \mid \overline{\delta}^q(B, \mathfrak{B})$.

К этой двойственности, которую автор называет вторым законом двойственности Ситникова, и примыкает реферируемая заметка.

К естественному гомоморфизму вложения h группы $\Delta_c^p(A, \mathfrak{A})$ в группу $\delta^p(A, \mathfrak{A})$, изученному автором в его цитированной статье, имеется сопряженный гомоморфизм $\overline{h}$ группы $\overline{\Delta}^q(B, \mathfrak{B})$ в группу $\overline{\delta}^q(B, \mathfrak{B})$, также имеющий характер гомоморфизма вложения. Получается схема

$$\begin{array}{|l|c|} \hline \Delta_c^p A \supseteq \Delta_1^p A \perp Y^q B \subseteq \overline{\delta}^q B & \uparrow \\ h \quad \diagdown & \\ \downarrow \quad \delta^p A \supseteq C^p A \perp X^q B \subseteq \overline{\Delta}^q B & \overline{h}, \\ \hline \end{array}$$

в которой знак $\perp$ означает аннуляцию, а диагональная черта — двойственность $C^p A \mid Y^q B$.

Отсюда вытекает, что все топологические инварианты множества A (соответственно множества B), которые могут быть выражены через свойства гомоморфизма h (соответственно гомоморфизма $\overline{h}$), оказываются дуализируемыми. В частности, дуализируемым является так называемый скользящий нарост множества A, т. е. фактор-группа $\delta^p A - C^p A$ группы $\delta^p A$ по подгруппе тех ее элементов, которые определяются компактными циклами. *К. А. Ситников*

2149. О гомотопических группах букетов сфер. I. Чжан Су-чэн (On the homotopy groups of $S^p \cup S^q$. I. Chang S. C.), 中國科學 (Чжунго кэсюэ — Acta Scientia Sinica), 1954, 3, № 3, 219—223 (англ.)

Английский текст статьи автора (РЖМат, 1954, 5084).

2150. О гомотопических группах букетов сфер. II. Чжан Су-чэн (On the homotopy groups of $S^p \cup S^q$. II. Chang S. C.), 中國科學 (Чжунго кэсюэ — Acta Scientia Sinica), 1954, 3, № 3, 225—236 (англ.)

Английский текст статьи автора (РЖМат, 1954, 5085).

2151. О поведении точек при гомеоморфных преобразованиях пространства. (Обобщение теорем Биркгофа). Барбашин Е. А., Тр. Уральск. политехн. ин-та, 1954, № 51, 4—11

Подробно изложены результаты, ранее опубликованные автором (см. Докл. АН СССР, 1946, 51, 3—5).

Рассматриваются произвольный компакт R и полуупорядоченная группа G его гомеоморфизмов на себя, причем соотношение порядка $>$ в группе G удовлетворяет следующим условиям: 1) а) $g > g$ невозможно; б) из $g_1 > g_2$, $g_2 > g_3$ следует $g_1 > g_3$; в) выражения $g_1 > g_2$ и $g_2 < g_1$ имеют одинаковый смысл. 2) Если $g_1 > g_2$, то $gg_1 > gg_2$ и $g_1 g > g_2 g$, где g — произвольный элемент группы G. 3) В группе G существует такая счетная последовательность элементов $g_1 < g_2 < g_3 < \ldots < g_n < \ldots$, что для любого элемента g из G существует элемент g_n данной последовательности, следующий за g, т. е. $g < g_n$.

Такая счетная последовательность называется ω-рядом. Автор вводит обычным образом понятия траектории точки и инвариантного множества пространства R, а также переносит на рассматриваемые им группы преобразований понятия ω-предельной точки, блуждающей точки, устойчивой точки, центра, рекуррентной точки, минимального множества динамической системы и обобщает соответствующие теоремы Биркгофа (см. Немыцкий В. В., Степанов В. В., Качественная теория дифференциальных уравнений, гл. V, Гостехиздат, 1949).

Приведем основные определения и результаты.

Точка $x \in R$ называется блуждающей, если существует такая окрестность $U(x)$ точки x и такой элемент $g_0 \in G$, что для всех $g > g_0$ имеет место соотношение $g(U(x)) \cap U(x) = 0$.

Точка $x \in R$ называется устойчивой, если для произвольной окрестности $U(x)$ этой точки и произвольного элемента $g_0 \in G$ существует такой элемент $g > g_0$, что $g(x) \subset U(x)$.

Пусть $x \in R$. Предельная точка последовательности $\{g_i(x)\}$, где g_i — элементы некоторого ω-ряда группы G, называется ω-предельной точкой для точки x. Совокупность всех ω-предельных точек для данной точки составляет ее ω-предельное множество.

Точка $x \in R$ называется рекуррентной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой элемент $g_\varepsilon \in G$, что для любой пары точек y_1, y_2 траектории точки x можно указать элемент g, удовлетворяющий условиям $e \leqslant g \leqslant g_\varepsilon$ и $\rho[g(y_1), y_2] < \varepsilon$ (ρ — знак расстояния).

Понятие центра и минимального множества определяются автором совершенно так же, как и в теории Биркгофа.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Для любой окрестности $U(M_1)$ множества M_1, состоящего из всех неблуждающих

в R точек, существует такой элемент $g_0 \in G$, что $g(x) \subset U(M_1)$, если $g > g_0$, $x \in R$.

Теорема 2. Множество устойчивых точек всюду плотно в центре.

Теорема 4. Все точки минимального множества рекуррентны.

Теорема 5. Предположим, что, каковы бы ни были элемент $g_0 \geqslant e$ из G и число $\varepsilon > 0$, существует такое число $\delta > 0$, что при $\rho(x, y) < \delta$ и $e \leqslant g \leqslant g_0$ имеет место неравенство $\rho[g(x), g(y)] < \varepsilon$. Тогда ω-предельное множество рекуррентной точки минимально. *М. И. Грабарь*

См. также: 2195, 2201, 2308

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2152. **Гомеоморфные неизмеримые отображения. Зарицкий** (Гомеоморфне невимірне відображення. Зарицький М. О.), Доповіді та повідомлення Львівськ. ун-ту, 1953, № 4, ч. 2, 59—60 (укр.)

Лебег дал пример топологического отображения, преобразующего измеримое множество в неизмеримое. Этот пример был изложен в геометрических терминах. Автор строит арифметический пример функции, гомеоморфно отображающей измеримое множество на неизмеримое (оба множества находятся на числовой прямой). Доказательство неизмеримости множества-образа не приводится.

В работе имеется ряд опечаток; например, в формуле (4) вместо $C_n = n + u_{n+1}$ должно быть $C_n = n + u_n + 1$; опечатка имеется и в формуле (3). *Ю. С. Очан*

2153. **О дифференцировании сложных функций. Бонати-Саворньян** (Sulla derivazione di funzioni composte. Bonati Savorgnan Carlo), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, 1953, **22**, № 2, 258—264 (итал.)

Доказывается теорема: Пусть $f(x, y, z)$ определена в параллелепипеде $R = \{a \leqslant x \leqslant b,\ c \leqslant y \leqslant d,\ e \leqslant z \leqslant g\}$ и имеет там частные производные первого порядка, непрерывные относительно каждой пары переменных; функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ абсолютно непрерывны на отрезке $I = [\alpha, \beta]$ и на нем почти всюду $x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) > 0$. Кроме того, точка $[x(t), y(t), z(t)]$ находится внутри R для почти всех t из I. Тогда сложная функция $F(t) = f(x(t), y(t), z(t))$ имеет асимптотическую производную почти всюду на I, и эта производная почти всюду равна $f'_x x' + f'_y y' + f'_z z'$; таким образом, если функция $F(t)$ почти всюду дифференцируема, то почти всюду справедлива обычная формула для дифференцирования сложных функций.

Случай дифференцирования сложных функций от двух переменных был рассмотрен Скорца-Тозо (Scorza Toso A., Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1952, **21**, 198—201), а функции вида $f(x, y(x))$ изучались Скорца-Драгони (Scorza Dragoni, Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1951, **20**, 462—467). *Н. К. Бари*

2154. **О необходимом и достаточном условии равностепенной непрерывности семейств функций. Бенерт-Смирнов** (Über eine notwendige und hinreichende Bedingung der gleichgradigen Stetigkeit von Funktionenmengen. Behnert-Smirnov K. N.), Math. Ann., 1954, **127**, № 5, 427—432 (нем.)

Пусть выпуклая функция $F(t)$ определена на всей действительной оси R, $F(-t) = F(t) \geqslant F(0) = 0$ для всех $t \in R$, $F'(-\infty) = -\infty$ и $F'(+\infty) = +\infty$. Рассматривается семейство E действительных функций $u(x)$, определенных в некоторой области G n-мерного евклидова пространства. На семейство E накладываются следующие ограничения:

а) каждая функция $u \in E$ имеет обобщенные частные производные первого порядка u_1, u_2, ..., u_n по всем n аргументам,

$$u(x) = u(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \int_{x_0}^{x} u_i(x)\, dx_i,\quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in G;$$

б) для каждой функции $u \in E$ выражение $\sum_{i=1}^{n} F[u_i(x)]$ интегрируемо в G и

$$\sum_{i=1}^{n} \int F[u_i(x)]\, dG \leqslant A,\quad A = \text{const};$$

в) каждая точка границы области G достижима изнутри с помощью достаточно малых конусов в смысле С. Л. Соболева.

Доказывается: для того чтобы семейство E было равностепенно непрерывно в области G, необходимо и достаточно, чтобы сходился интеграл

$$\int_a^{\infty} [F'(x)]^{1/(1-n)}\, dx,\quad F'(a) > 0.$$

Эта теорема есть дальнейшее усиление соответствующих результатов С. Л. Соболева (Докл. АН СССР, 1936, **1**, 279—282; **3**, 107), В. И. Кондрашова (Докл. АН СССР, 1938, **18**, 235—240), И. Г. Петровского и автора (Бюл. МГУ, 1938, сер. А, № 10, 15—16). В последней статье доказана, в частности, необходимость приведенных условий. *Л. Д. Кудрявцев*

2155. **Квадрируемость непрерывных поверхностей, заданных в полярных координатах. Костовский А. Н.**, Доповіді та повідомлення Львівськ. ун-ту, 1953, № 4, ч. 2, 58

Формулируются результаты, доказанные в другой работе автора (РЖМат, 1954, 5503).

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

2156. **О некоторых тригонометрических рядах. VI. Идзуми** (Some trigonometrical series. VI. Izumi Shin-ichi), Tôhoku Math. J., 1954, **5**, № 3, 290—295 (англ.)

Части IV и V см. РЖМат, 1954, 5518, 5519.

Рассматриваются вопросы, близкие к сильной

суммируемости рядов Фурье. Именно выводятся достаточные условия сходимости в точке ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} |s_n^*(x) - f(x)|^2 n^{\alpha}, \qquad (1)$$

где $\alpha > 0$, $s_n^*(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t)\sin nt / \operatorname{tg}(t/2)]dt$.

Справедлива теорема: Если функция

$$g(t) = [f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)] / [2\operatorname{tg}(t/2)]$$

L^2-интегрируема и $\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} h^{-p}|g(t+h)-g(t)|^2 dt\,dh < \infty$ при $p > \alpha + 1 \geqslant 1$, то ряд (1) сходится при этом α $(0 \leqslant \alpha \leqslant 1)$. Если же $2 < p < 3$, то (1) сходится для $\alpha = p - 1$.

Аналогичная теорема доказывается и для случая, когда функция $g(t)$ имеет k-ю производную, удовлетворяющую требованиям приведенной теоремы. Естественно, что в этом случае ряд (1) будет сходиться при бо́льших α.

Кроме этого, теорема аналогичного типа доказывается для некоторого класса бесконечно дифференцируемых функций. *П. Л. Ульянов*

2157. О некоторых тригонометрических рядах. VII. Идзуми (Some trigonometrical series. VII. Izumi Shin-ichi), Tôhoku Math. J., 1954, 5, № 3, 268—271 (англ.)

Вводится понятие квазинезависимой последовательности функций и находятся достаточные условия того, чтобы заданная последовательность содержала квазинезависимую последовательность.

Именно последовательность положительных измеримых функций на отрезке $[0, 1]$ называется квазинезависимой, если для любого λ $(0 < \lambda < 1)$ и любого $(a, b) \subset (0, 1)$ существует такое N, что при $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ $(m \neq n)$ справедливо неравенство

$$\int_a^b f_m(t) f_n(t)\,dt > \lambda \int_a^b f_m(t)\,dt \cdot \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Показывается, что если последовательность положительных измеримых функций $\varphi_n(t)$ равномерно ограничена и существует последовательность $\{n_k\}$, удовлетворяющая неравенству

$$\varliminf_{k\to\infty} \varphi_{n_k}(x) \geqslant \mu > 0,$$

то последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ содержит квазинезависимую подпоследовательность.

Кроме этого, вводится другое определение квазинезависимой последовательности функций. Именно последовательность $\{f_n(t)\}$ измеримых функций, определенных на $[0,1]$, называется квазинезависимой, если для любого λ $(0 < \lambda < 1)$ и для любых (a, b) и (c, d) существует такое число N, что при $n \geqslant N$ и $m \geqslant N$ справедливо неравенство

$$mE\{t;\ a < f_n(t) < b,\ \ c < f_m(t) < d\} > \lambda \cdot mE\{t;\ a < f_n(t) < b\} \cdot mE\{t;\ c < f_m(t) < d\}.$$

При этом определении справедлива теорема: Если последовательность измеримых функций $\varphi_n(x)$ такова, что для любого $(a, b) \subset (0, 1)$

$$\varlimsup_{n\to\infty} mE\{t;\ a < \varphi_n(t) < b\} > 0,$$

то последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ содержит квазинезависимую последовательность. *П. Л. Ульянов*

2158. О некоторых тригонометрических рядах. VIII. Идзуми (Some trigonometrical series. VIII. Izumi Shin-ichi), Tôhoku Math. J., 1954, 5, № 3, 296—301 (англ.)

Дается прямое доказательство (без теорем типа Таубера) следующей теоремы Суноути: Если 1) $\Delta = \gamma/\beta \geqslant 1$, 2) $\varphi_\beta(t) = o(t^\gamma)$ при $t \to 0$ ($\varphi_\beta(t)$ — интеграл порядка β функции $\varphi(t)$) и 3) $\int_0^t |d(u^\Delta \varphi(u))| = O(t)$ $(0 < t < \eta)$, то ряд Фурье функции $\varphi(x)$ сходится в точке $x = 0$.

Кроме того, доказывается следующая теорема: При условиях 1) и 2) и условии

$$\varlimsup_{k\to\infty} \varlimsup_{u\to 0} \int_{(ku)^{1/\Delta}}^{\eta} t^{-1} |\varphi(t) - \varphi(t+u)|\,dt = 0$$

ряд Фурье функции $\varphi(t)$ сходится в точке $t = 0$.

Из сформулированной теоремы получается как следствие утверждение: При условиях 1) и 2) и условии

$$\varlimsup_{k\to\infty} \varlimsup_{n\to\infty} \int_{1/(kn)^{1/\Delta}}^{\eta} \left| \frac{\varphi(t)}{t} - \frac{\varphi(t+\pi/n)}{t+\pi/n} \right| dt = 0$$

ряд Фурье функции $\varphi(t)$ сходится в точке $t = 0$.

Сформулированные два последних утверждения являются обобщением теорем Суноути, Гергена и др. *П. Л. Ульянов*

2159. Замечание к вопросу о сходимости интерполяционного процесса Лагранжа. Алексич (Eine Bemerkung zur Konvergenzfrage des Lagrangeschen Interpolationsverfahrens. Alexits Georg), Acta math. Acad. sci. hung., 1953, 4, № 3—4, 233—236 (нем.; резюме русс.)

Пусть $L_n(f, x) = \sum_1^n l_{nk}(x) f(x_{nk})$ есть алгебраический многочлен степени не выше $n-1$, интерполирующий функцию $f(x)$ в нулях многочлена $P_n(x)$. При этом многочлены $P_n(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ образуют ортонормированную систему на конечном отрезке $[a, b]$ с весом $p(x) \geqslant 0$.

Доказывается теорема: Если $p(x) > 0$ почти всюду и $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$ на $[a, b]$, где $\alpha > 1/2$, то $\{L_n(f, x)\}$ сходится почти всюду на $[a, b]$ к $f(x)$.

Кроме этого, получено следующее усиление теоремы Шохата, Грюнвальда и Турана (Натансон И. П., Конструктивная теория функций, М.—Л., Гостехиздат, 1949, 546) в ее локальной форме:

Пусть $p(x) \geqslant m > 0$ при $x \in [\alpha, \beta] \subseteq [a, b]$ и $f(x) \in \operatorname{Lip}\alpha$ на $[a, b]$, где $\alpha > 1/2$. Тогда $\{L_n(f, x)\}$ сходится равномерно к $f(x)$ на всяком интервале, лежащем целиком внутри $[\alpha, \beta]$. *Ф. В. Широков*

2160. О наилучшем взвешенном приближении на всей оси посредством целых функций конечной степени. Ахиезер Н. И., Докл. АН СССР, 1954, 94, № 6, 983—986

Пусть действительная функция $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, принимает на оси хотя бы по одному разу значения $\pm L_n$, где $L_\varphi = \sup|\varphi(x)|$. Чебышевским

множеством функции $\varphi(x)$ называется последовательность точек $\cdots < \xi_n < \xi_{n+1} < \cdots$, в которых $\varphi(x)$ поочередно принимает значения L_φ, $-L_\varphi$ и которая не является правильной частью какой-нибудь последовательности указанного вида.

Выводятся условия, при которых целая функция $G_p(z)$ среди всех целых функций степени $\leqslant p$ наименее уклоняется от $\varphi(x)$ в метрике

$$\|f\| = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)| / \Phi(x),$$

где $\Phi(x) \geqslant 1$ — непрерывная функция, предполагаемая майорантой квазиконечного роста (по терминологии С. Н. Бернштейна). Эти условия заключаются в том, что функция $[\varphi(x) - G_p(x)] / \Phi(x)$ должна иметь на оси $-\infty < x < \infty$ чебышевское множество, являющееся множеством корней целой функции конечной степени $G(z)$, для которой $\lim_{y\to\infty} [y\Phi_q(iy) / G(iy)] = 0$.

Здесь $\Phi_q(z)$ — целая функция степени $q = q(p)$, удовлетворяющая неравенству

$$\sup |g(z)| \leqslant \Phi_q(z), \quad \operatorname{Im} z > 0,$$

в котором верхняя грань берется по всевозможным целым функциям степени $\leqslant p$ с условием

$$|g(x)| \leqslant \Phi(x), \quad -\infty < x < \infty.$$

Полученный результат иллюстрируется на примере функции $\Phi(x)$, являющейся модулем целой функции конечной степени. *С. Н. Мергелян*

2161 Д. Аппроксимация непрерывных функций нескольких переменных посредством целых функций конечной степени. Иноземцев О. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Харьковск. ун-т, Харьков, 1954

См. также: 2055, 2058 К, 2075, 2142, 2245, 2256, 2267, 2282

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

2162. Замечания о представлении аналитических функций. Помпейю (Observări la reprezentarea functiilor analitice. Pompeiu D.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 7—8, 247—248 (рум.; резюме русс., франц.)

Отмечается, что функция $F(x) = A/(x - x_0)$ элементарными преобразованиями приводится к виду

$$F(x) = F^2(a) / [F(a) - (x-a)F'(a)],$$

где x, a — любые точки комплексной плоскости, отличные от x_0, причем для этих точек имеем

$$F(a) = F^2(x) / [F(x) + (x-a)F'(x)].$$

Далее для всякого элемента $F(x)$ любой аналитической функции, определяемого степенным рядом

$$F(x) = F(a) + \frac{x-a}{1}F'(a) + \frac{(x-a)^2}{1.2}F''(a) + \cdots,$$

в его круге сходимости получается уравнение

$$F(a) = F(x) - \frac{x-a}{1}F'(x) + \frac{(x-a)^2}{1.2}F''(x) - \cdots$$

В. С. Федоров

2163. Распределение значений многочленов с действительными коэффициентами и действительными корнями. Надь (Wertverteilung bei Polynomen mit lauter reellen Nullstellen und Koeffizienten. Sz.-Nagy Gyula), Acta math. Acad. sci. hung., 1952, **3**, № 4, 269—274 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (нем.; резюме русс.)

Пусть многочлен $f(z) = (z-a_1)\ldots(z-a_n)$ имеет только действительные корни, причем $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n$. Доказывается следующее предложение: Знак $\operatorname{Re} f(z)$ внутри дельтоида D_p $(1 \leqslant p \leqslant n-1)$ с главной диагональю (a_p, a_{p+1}) и с углами π/p и $\pi/(n-p)$ у вершин a_p и a_{p+1} соответственно постоянен и равен знаку $(-1)^p$. То же имеет место внутри областей D_0 и D_n, где D_0 и D_n суть угловые пространства угла π/n с вершинами a_1 и a_n соответственно, симметричные относительно действительной оси, не содержащие внутри корней a_k. Если некоторый дельтоид D_p^* содержит D_p и имеет с D_p общую главную диагональ, то существует многочлен $f(z)$ степени n с действительными корнями и действительными коэффициентами, у которого $\operatorname{Re} f(z)$ в D_p^* меняет знак.

Далее доказывается, что точки, в которых значение $f(z)$ действительно, лежат на действительной оси и на некоторой алгебраической кривой порядка $n-1$. Эта кривая имеет $n-1$ асимптот, проходящих через центр тяжести множества корней функции $f(z)$. Если корни $f(z)$ различны, то на любой конечной дуге этой кривой $f(z)$ имеет один и тот же знак. Точки, в которых значения $f(z)$ чисто мнимы, лежат на алгебраической кривой порядка n, имеющей n асимптот, также проходящих через центр тяжести множества корней функции $f(z)$.

Устанавливаются отрезки, параллельные оси x, исходящие из данной точки z_0, на которых $f(z)/f(z_0)$ неположительно, соответственно мнимо. Указывается окружность с центром в данной точке z_0, на которой отношение $f(z)/f(z_0)$ неотрицательно.

В резюме содержится также утверждение о виде связных областей плоскости, в которых $\operatorname{Re} f(z)$ сохраняет знак, но в самой работе об этом не говорится. *С. П. Пуликин*

2164. Теоремы Абеля и Таубера для рядов по многочленам Фабера. Суетин П. К., Докл. АН СССР, 1953, **91**, № 1, 27—30

Рассматривая производящую функцию для многочленов Фабера, автор устанавливает условия, при

которых справедливы теоремы Абеля и Таубера для рядов

$$\sum a_n \Phi_n(z) \qquad (1)$$

по многочленам Фабера.

Пусть K — ограниченный континуум, дополнение Δ_∞ к которому связно, $\Psi(w)$ отображает $|w|>1$ на Δ_∞, причем $\Psi(\infty)=\infty$, и пусть Γ — граница Δ_∞ и G — множество внутренних точек K. Пусть также $\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}=1$. Если $\Psi''(w)\in H_1$, то из сходимости ряда (1) в точке $z_0\in\Gamma$, в которой Γ имеет конечную кривизну, следует абсолютная и равномерная сходимость этого ряда внутри G. Пусть ряд (1) сходится в $z_0\in\Gamma$ и Γ аналитична в окрестности z_0. Сумма ряда (1) при $z\to z_0$ стремится к $f(z_0)=\Sigma a_n\Phi_n(z_0)$, если выполнено одно из следующих условий:

а) $\Psi''(w)\in H_1$; б) $\Psi'(w)\in H_1$ и $a_n=O(1/n)$;

в) $\Psi'(w)\in H_\delta$ $(1<\delta\leqslant 2)$ и ряд $\Sigma|a_n|^\delta$ сходится;

г) $a_n=O(\varepsilon_n/n)$, где $\varepsilon_n>0$ и ряд $\Sigma\varepsilon_n^2/n$ сходится.

Существуют такие континуумы, что ряд (1) сходится в некоторой граничной точке G, однако расходится в точке $z_1\in G$. Если сумма ряда (1) стремится к $f(z_0)$ при стремлении $z\in G$ по некоторому некасательному к Γ пути к точке z_0, в окрестности которой Γ аналитична, то ряд (1) в точке z_0 сходится к $f(z_0)$ при выполнении одного из условий:

а) Γ — спрямляемая кривая и $a_n=O(1/n)$;

б) $a_n=O(\varepsilon_n/n)$, $0<\varepsilon_n<c$ и ряд $\Sigma\varepsilon_n^2/n$ сходится.

Устанавливается также ряд других результатов, аналогичных приведенным выше. *С. Н. Мергелян*

2165. Оценки производных полиномов и взвешенно-наилучшие приближения в комплексной области. Джрбашян М. М., Докл. АН АрмССР, 1953, **17**, № 1, 3—7 (резюме арм.)

Рассматриваются оценки производных многочленов с заданной мажорантой на неограниченном множестве и их применение к взвешенно-наилучшим приближениям.

Пусть $P_n(z)$ — полином степени n, удовлетворяющий неравенству

$$|P_n(z)|<e^{p(|z|)} \qquad (1)$$

в области $|\arg z|\geqslant\pi/(2\alpha)$, $\alpha\geqslant 1/2$, причем $p(x)$ — возрастающая функция, $q(y)$ — функция, обратная к $p(x)$.

Если

$$\int_1^\infty \frac{p(x)}{x^{1+\alpha}}\,dx=\infty \qquad (2)$$

и $\arg t=\pm\pi/(2\alpha)$, то

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,|P_n^{(k)}(t)|\left(\int_1^n\frac{dy}{q^\alpha(y)}\right)^{-k/\alpha}\leqslant A_k e^{\overline{p}(|t|)}$$

равномерно в каждом конечном промежутке изменения $|t|$. Если интеграл в (2) сходится, то для любого семейства $\{P_n(z)\}$, удовлетворяющего (1), семейство $\{P_n^{(k)}(z)\}$ $(k=1,2,\ldots)$ оказывается нормальным в области $|\arg z|<\pi/(2\alpha)$. Полученные неравенства для производных используются для установления ряда теорем о наилучших полиномиальных приближениях с весом. Вот пример одной из теорем подобного рода: Если функция $f(x)$ имеет k-ю производную, равномерно непрерывную на оси $-\infty<x<\infty$ с модулем непрерывности $\omega(\delta)$, а весовая функция $p(x)$ удовлетворяет неравенству

$$[xp'(x)]/p(x)\geqslant a>1,\quad |x|>x_0,$$

то

$$E_n(f,p)=\inf\sup|f(x)-Q_n(x)|<$$
$$<C_k\left(\int_1^n\frac{dy}{q(y)}\right)^{-k}\omega\left[\left(\int_1^n\frac{dy}{q(y)}\right)^{-1}\right].$$

Условия, накладываемые в прямых теоремах о наилучшем приближении, предполагают, в частности, что весовая функция убывает быстрее, чем $\exp\{-|x|^a\}$, где $a>1$, в то время как для возможности приближений достаточна (при некотором ограничении на регулярность убывания) расходимость интеграла $\int_1^\infty\frac{p(x)}{x^2}\,dx$. Результаты приводятся без доказательств. *С. Н. Мергелян*

2166. Письмо в редакцию. Иванов В. К., Матем. сб., 1953, **33(75)**, № 3, 676

Указывается, что определение характеристики на стр. 551 работы автора (Матем. сб., 1952, **30(72)**, 543—558) дано неверно и приводится правильная его редакция. Результат, содержащийся в теореме 8 упомянутой работы, ранее получен Е. Я. Ремезом. *С. Н. Мергелян*

2167. О функциональном уравнении $E(f)=\sum_0^p A_i f(x+\omega_i)=0$. Гермэнеску (Asupra ecuaţiei funcţionale $E(f)=\sum_0^p A_i f(x+\omega_i)=0$. Ghermănescu M.), Comun. Acad. R. P. Române, 1953, **3**, № 5—6, 187—192 (рум.; резюме русс., франц.)

Указывается, что уравнение, приведенное в заглавии, имеет элементарные решения вида $P(x)e^{z_\nu x}$, где z_ν — корни уравнения

$$\theta(z)=\sum_0^p A_i e^{\omega_i z}=0,$$

а $P(x)$ — многочлен степени меньшей кратности z_ν, и решения несколько более общего вида

$$g(x,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{e^{xz}\psi(z)\,dz}{\theta(z)},$$

где C_r — окружность $|z|=r$, а $\psi(z)$ регулярна внутри C_r (и первые и вторые решения являются общеизвестными). Рассматривается случай, когда

$$\psi(z)=\varphi(z)\int_{x_0}^{x_1}e^{-zt}f(t)\,dt$$

($\varphi(z)$ регулярна внутри C_r), и в соответствии с этим

$$g(x,r)=\int_{x_0}^{x_1}G(x-t,r)f(t)\,dt,$$

$$G(u,r)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{e^{uz}\varphi(z)\,dz}{\theta(z)}.$$

При $\varphi(z)=1$, $\theta(z)=1-e^{az}$, $ar=(2n+1)\pi$, $x_0=0$, $x_1=a>0$

$$g(x,r)=\frac{1}{a}\int_0^a\frac{\sin(2n+1)\dfrac{x-t}{2}\dfrac{2\pi}{a}}{\sin\dfrac{x-t}{2}\dfrac{2\pi}{a}}f(t)\,dt$$

и, следовательно, является частной суммой Фурье функции $f(x)$.

Ставятся, но не решаются вопросы: 1) при каких условиях решение $f(x)$ может быть представлено рядом из элементарных решений, 2) при каких условиях $g(x,r_n)\to f(x)$, если $f(x)$ — решение и $r_n\to\infty$.

Примечание референта. Первый вопрос в действительной области разрешен при некоторых условиях Хильбом (Hilb, Math. Ann., 1918, **78**), а в комплексной области — референтом (Матем. сб., 1949, **24 (66)**, 347—374). *А. Ф. Леонтьев*

2168. Заметка о линейном пространстве, порожденном последовательностью целых функций. Ийер (A note on the linear space generated by a sequence of integral functions. Iyer V. Ganapathy), J. Indian Math. Soc., 1953, **17**, № 4, 183—185 (англ.)

Показывается, что в установленной ранее автором (Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 876) теореме: если целая функция $f(z)=\sum_0^\infty a_nz^n$ удовлетворяет условиям: 1) действительные части a_n убывают с возрастанием n, 2) $a_n\neq0$ и $a_n\neq a_m$ при $n\neq m$, то любую целую функцию можно представить в виде предела равномерно сходящейся в каждом конечном круге последовательности линейных комбинаций функций $f_k(z)=\sum_{n=0}^\infty a_n^kz^n$ ($k=1,2,\ldots$)—условие 1) является лишним. *А. Ф. Леонтьев*

2169. Заметка о рядах Дирихле. V. О целых функциях, определенных рядами Дирихле. I. Танака (Note on Dirichlet series (V). On the integral functions defined by Dirichlet series (I). Tanaka Chuji), Tôhoku Math. J., 1953, **5**, № 1, 67—78 (англ.)

Доказывается ряд формул; позволяющих при тех или иных предположениях относительно $\{\lambda_n\geqslant0\}$ находить по коэффициентам a_n ($n=1,2,\ldots$) порядок ρ и тип k целой функции $F(s)$, определенной рядом

$$F(s)=\sum_1^\infty a_n\,e^{-\lambda_n s})\,(s=\sigma+it,\ \lambda_1<\cdots<\lambda_n\to\infty),\quad(1)$$

сходящимся равномерно во всей плоскости (т. е. в любой полуплоскости $\mathrm{Re}\,(s)\geqslant\alpha$). При этом по определению

$$\rho=\varlimsup_{\sigma\to-\infty}(-\sigma)^{-1}\ln^+\ln^+M(\sigma),$$

$$k=\varlimsup_{\sigma\to-\infty}e^{\sigma\rho}\ln^+M(\sigma),\quad M(\sigma)=\sup_{-\infty<t<\infty}|F(\sigma+it)|.$$

При других более жестких ограничениях на $\{\lambda_n\}$ некоторые из этих формул были установлены ранее (Ritt J. F., Amer. J. Math., 1928, **50**, 73—86; Izumi S., Japan. J. Math., 1929, **6**, 199—204; Sugimura K., Math. Z., 1929, **29**, 264—277).

Основная теорема. Пусть ряд (1) равномерно сходится во всей плоскости. Тогда

$$\varlimsup_{x\to\infty}(x\ln x)^{-1}\ln T_x=-1/\rho_u,$$

где

$$T_x=\sup_{-\infty<t<\infty}\Big|\sum_{[x]\leqslant\lambda_n<x}a_n\exp(-i\lambda_nt)\Big|,$$

$$\rho_u=\varlimsup_{\sigma\to-\infty}(-\sigma)^{-1}\ln^+\ln^+M_u(\sigma),$$

$$M_u(\sigma)=\sup_{\substack{-\infty<t<\infty\\1\leqslant k<\infty}}\Big|\sum_{n=1}^k a_n\exp[-\lambda_n(\sigma+it)]\Big|.$$

Из этой теоремы вытекает ряд других теорем, например:

Теорема 1. Пусть ряд (1) равномерно сходится во всей плоскости. Тогда

$$-1/\rho_c\leqslant-1/\rho\leqslant-1/\rho_u\leqslant-1/\rho_c+\varlimsup_{x\to\infty}(x\ln x)^{-1}\ln^+N(x),$$

$$-1/\rho_c=\varlimsup_{n\to\infty}(\lambda_n\ln\lambda_n)^{-1}\ln|a_n|,$$

$$N(x)=\sum_{[x]\leqslant\lambda_n\leqslant x}1.$$

Отсюда получаем

Следствие 1. Если $\lim\limits_{x\to\infty}(x\ln x)^{-1}\ln^+N(x)=0$, то тогда порядок ρ функции (1) определяется по формуле

$$-1/\rho=\varlimsup_{n\to\infty}(\lambda_n\ln\lambda_n)^{-1}\ln|a_n|.\qquad(2)$$

Формула (2) при более сильном условии $\varlimsup\limits_{n\to\infty}(\lambda_n)^{-1}\ln n<\infty$ была установлена Риттом (см. указанную выше литературу). Другие результаты аналогичны. *А. Ф. Леонтьев*

2170. Некоторые теоремы об ограниченных аналитических функциях. Кубо (Some theorems on bounded analytic functions. Kubo Tadao), Mem. College Sci. Univ. Kyoto, 1953, **A27**, 235—243 (англ.)

Доказываются следующие две теоремы:

Пусть $f(z)$ — ограниченная и однозначная функция в многосвязной области D и пусть $f(z)=\sum a_nf_n(z)$ есть представление $f(z)$ с помощью множества функций, ортонормированных граничной нормой.

1. Если $M(z)=\sum|a_n|\,|f_n(z)|$, то $M(z)=o([d(z)]^{-1/2})$, где $d(z)$ есть расстояние от z до ближайшей граничной точки области D.

2. Если $\ln[f(z)/z]=g(z)$ является регулярной и однозначной функцией в области D и

$$\varlimsup_{z\to t}|g(z)|\leqslant\lambda(t),$$

где t находится на границе области D и $\lambda(t)$ — положительная и непрерывная функция, то $f(z)$ однолистна в круге с центром в начале координат, радиус которого может быть определен с помощью ядра, введенного референтом (Trans. Amer. Math. Soc., 1950, **69**, 161—178). Теорема 1 обобщает теорему Харди, а теорема 2 — теорему референта (Amer. J. Math., 1949, **71**, 845—852). *Z. Nehari*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 208.

2171. Заметка об ограниченных функциях. И м у р а (A note on bounded functions. I m u r a H i d e o), Mem. College Sci. Univ. Kyoto, 1953, **A 27**, 245—248 (англ.)

Пусть $f(z) = z^p + a_{p+1}z^{p+1} + \ldots$ — регулярная функция в круге $|z| < 1$ с $|f(z)| < M$ (M — постоянная и пусть $z_1, r_1 = |z_1| \neq 0$, есть ее нуль, ближайший к точке $z = 0$. Автор показывает, что $f(z)$ есть p-листная функция в $|z| < R$, где R есть наименьший положительный корень уравнения

$$h(p) \equiv p - rr_1^2(M^2-1)(r_1-r)^{-1}(1-r_1r)^{-1} - r(M^2r_1^2-1)(Mr_1-r)^{-1}(1-Mr_1r)^{-1} = 0.$$

Если $r_1 = 1/M$, то $R = N - (N^2-1)^{1/2}$, где $N = {}^1/_2[(M+M^{-1}) + p^{-1}(M-M^{-1})]$. Этот результат был получен Лумисом (Loomis L. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1940, **46**, 496—501). Для $p = 1$ достаточно показать выполнение неравенства $\mathrm{Re}(zf'/f) \geqslant h(1) > 0$ в круге $|z| < R$ и тем самым показать также, что $f(z)$ является звездообразной по отношению к началу координат в круге $|z| < R$. Для доказательства теоремы в общем случае применяется теорема Кобори. *M. Marden*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 208.

2172. Кольцо целых функций конечного порядка. Х е н р и к с е н (On rings of entire functions of finite order. H e n r i k s e n M e l v i n), J. Indian Math. Soc., 1953, **17**, № 2, 59—61 (англ.)

Реферируемая статья примыкает к другим работам автора (Pacif. J. Math., 1952, **2**, 179—184; РЖМат, 1954, 5073). Пусть $i_h(f, n)$ — число корней целой функции $f(z)$ в круге с центром в ее корне a_n и радиуса $|a_n|^{-h}$ и R_λ — кольцо целых функций порядка не большего λ.

Доказана теорема: Если максимальный идеал M' кольца R_λ содержит функцию $f(z)$, у которой $i_h(f, n)$ ограничено при некотором $h > 0$ для всех корней a_n, то кольцо вычетов R_λ/M' изоморфно полю комплексных чисел.

Автор замечает, что ему неизвестен пример максимального идеала, не удовлетворяющего условию теоремы. *Б. Я. Левин*

2173. Борелевская теорема об a-точках и исключительные значения целых и мероморфных функций. Ш а х, С и н г х (Borel's theorem on a-points and exceptional values of entire and meromorphic functions. S h a h S. M., S i n g h S. K.), Math. Z., 1953, **59**, № 1, 88—93 (англ.)

Авторы называют комплексное число α исключительным значением E (и. з. E) мероморфной функции $F(z)$, если существует такая монотонно возрастающая функция $\Phi(r)$, что $\int^{\infty} \frac{dr}{r\Phi(r)}$ существует и

$$\lim_{r\to\infty} \frac{T(r)}{n(r, \alpha)\,\Phi(r)} > 0.$$

Легко видеть, что значение исключительное в смысле Бореля является и. з. E и и. з. E является исключительным в смысле Неванлинна с дефектом $\delta(\alpha) = 1$.

Доказаны следующие теоремы: Если у мероморфной функции $F(z)$ конечного порядка при некотором α ($|\alpha| < \infty$) $\delta(\alpha) = \delta(\infty) = 1$, то $T(r, F') \sim T(r, F)$ при $r \to \infty$.

Если же $\delta(\alpha_1) = \delta(\alpha_2) = 1$ при $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ($|\alpha_1| < \infty, |\alpha_2| < \infty$), то $T(r, F') \sim 2T(r, F)$ при $r \to \infty$.

Устанавливается, что если у мероморфной функции $F(z)$ конечного порядка α ($|\alpha| < \infty$) и ∞ являются и. з. E, то для $F^{(k)}(z)$ 0 и ∞ являются и. з. E. Если же два конечных числа являются и. з. E для $F(z)$, то для $F'(z)$ единственным и. з. E является 0.

Отмечается, что последние два утверждения переносятся на исключительные значения в смысле Бореля.

Далее вводятся величины

$$\lambda = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln\ln M(r)}{\ln r}, \quad \lambda_1(\alpha) = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln^+ n(r, \alpha)}{\ln r}$$

и строится целая функция произвольного иррационального порядка ρ, у которой $\lambda_1(0) < \lambda$ (известно, что если вместо нижних пределов взять верхние, то такая функция невозможна).

Кроме того, авторы строят целую функцию, которая при заданных целых числах $a_1, a_2, \ldots, a_k$ удовлетворяет соотношениям $\lambda_1(-a_r) < \lambda$ ($r = 1, 2, \ldots, k$). Этот результат является усилением соответствующего результата Юнга. *Б. Я. Левин*

2174. Об одной теореме Плашереля и Пойа. Р е д х е ф ф е р (On a theorem of Plancherel and Pólya. R e d h e f f e r R. M.), Pacif. J. Math., 1953, **3**, № 4, 823—835 (англ.)

Известная теорема Пейли и Винера (Paley R.E.A.C., Wiener N., Amer. Math. Soc. Col. Pub., **19**, 12) в формулировке Планшереля и Пойа (см., например, Ахиезер Н. И., Лекции по теории аппроксимации, М. — Л., Гостехиздат, 1947, гл. IV) гласит: класс целых функций экспоненциального типа $\leqslant \sigma$, принадлежащих к $L_2(-\infty, \infty)$, совпадает с классом функций, представимых в виде

$$F(z) = \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{izt} f(t)\,dt,$$

где $f(t) \in L_2(-\sigma, \sigma)$.

В реферируемой работе на основе этой теоремы даются простые доказательства ряда результатов, часть которых может быть получена лишь при помощи более сложных методов теории функций. Приведем некоторые из них.

1) Пусть $F(z)$ — целая функция экспоненциального типа $\leqslant \sigma$ такая, что

$$F(x) = O(|x|^n), \quad |x| \to \infty.$$

Если

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \left\{ \int_1^r \frac{n(x)}{x}\,dx - \frac{2\sigma r}{\pi} + b\log r \right\} > -\infty,$$

где $n(x)$ — число действительных нулей $F(z)$, лежащих в круге $|z| \leqslant x$, то $F(z)$ имеет не более $b+n$ комплексных нулей во всей плоскости.

Следуя Пейли и Винеру, последовательность $\{e^{i\lambda_n x}\}$ имеет недостаток d на данном замкнутом интервале, если она становится полной в L_2 после присоединения d (но не менее, чем d) функций вида $e^{i\lambda x}$. Это определение распространяется также и на случай $d=0$ и $d<0$; в последнем случае речь идет об исключении $|d|$ (но не более чем $|d|$) функций из данной последовательности, так чтобы последовательность оставалась полной.

2) Пусть $\{\lambda_n\}$ есть последовательность комплексных чисел таких, что множество $\{e^{\pm i\lambda_n x}\}$ имеет конечный недостаток в некотором конечном интервале. Тогда недостаток равен d, только при условии, что:

$$\int_1^\infty x^{2d-2}|F(x)|^2\,dx<\infty,\quad \int_1^\infty x^{2d}|F(x)|^2\,dx=\infty,$$

где

$$F(x)=\prod\left(1-\frac{z^2}{\lambda_n^2}\right).$$

3) Пусть C означает класс целых функций экспоненциального типа $\leqslant a$, принадлежащих к классу $L_2(-\infty,\infty)$, и пусть h — любое мнимое число. Тогда класс функций $\{F'(z)\}$, $F\in C$, совпадает с классом функций $G(z+h)-G(z)$, $G\in C$. Этот результат справедлив также и для h действительных, если $0<|h|<2\pi/a$. Если же $|h|>2\pi/a$, то последний класс составляет правильную часть первого класса.

М. М. Джрбашян

2175. О мероморфных функциях, значения которых лежат в данной области. Лехто (On meromorphic functions whose values lie in a given domain. Lehto Olli), Suomalais. tiedeakat. toimituks., 1953, сер. AI, № 160, 15 pp. (англ.)

Пусть G — связная область, граница которой Γ имеет положительную логарифмическую емкость. Пусть $w=f(z)$ ($\not\equiv$ const) — мероморфная в $|z|<1$ функция такая, что $w=f(z)\in G$ и угловые граничные значения $w=f(e^{i\varphi})\in\Gamma$ для почти всех φ. Для функций этого класса имеет место неравенство (РЖМат, 1953, 702)

$$N(1,a)\geqslant g[a;f(0),G], \qquad (1)$$

где $g[a;f(0),G]$ — функция Грина для G с полюсом в $f(0)$, а N — функция Неванлинна числа a-точек. a называется нормальным (исключительным) значением $f(z)$, если в (1) имеет место равенство (строгое неравенство). Это определение несколько модифицируется для случая $a=f(0)$. Основные результаты автора:

Теорема 5. Если a — исключительное значение $f(z)$, то a является угловым граничным значением $f(z)$.

Теорема 7. Если $a\in G$ является угловым граничным значением $f(z)$, $f(e^{i\varphi})=a$, и a — нормальное значение $f(z)$, то $z=e^{i\varphi}$ является предельной точкой a-точек $f(z)$.

Результаты автора являются обобщением теорем Фростмана, Сейдела, Хёссьера и других, относящихся к случаю, когда множество Γ включает окружность $|w|=1$.

Библиография, 12 названий.

Примечание референта. Автор, записывая произведение Бляшке

$$\pi(z)=e^{i\lambda}\prod_1^\infty\frac{|z_\nu|}{z_\nu}\,\frac{z_\nu-z}{1-\bar z_\nu z},$$

всюду в статье опускает нормирующие множители $|z_\nu|/z_\nu$, без которых нельзя утверждать сходимость $\pi(z)$ при условии $\sum_1^\infty(1-|z_\nu|)<\infty$. Этот просмотр, однако, не отражается на справедливости утверждений автора, так как всюду оценивается $|\pi(z)|$.

А. А. Гольдберг

2176. Об обратных краевых задачах. Гахов Ф. Д., Уч. зап. Казанск. ун-та, 1953, 113, № 10, 9—20

Дается развернутое и несколько исправленное и дополненное изложение заметки автора, опубликованной ранее (Докл. АН СССР, 1952, 86, № 4, 649—652). Внутренняя задача формулируется следующим образом:

Дана функция $w=u(s)+iv(s)$, определяющая в плоскости $w=u+iv$ простую замкнутую кривую L_w, делящую плоскость на две области — внутреннюю D_w^+ и внешнюю D_w^-. Определить в плоскости z кривую L_z, ограничивающую конечную область D_z^+ (вообще говоря, многолистную), так, чтобы, считая параметр s длиной дуги кривой L_z, выражение $w(s)=u(s)+iv(s)$ было краевым значением аналитической функции, конформно отображающей область D_z^+ на область D_w^+ или D_w^-. Формулировка внешней задачи получается отсюда путем замены конечной области на область D_z^-, содержащую бесконечно удаленную точку.

Доказывается теорема:

Если $u(s)$, $v(s)$ — абсолютно непрерывные функции, имеющие почти везде ограниченные производные, причем множество значений s, для которых $u'(s)$, $v'(s)$ одновременно обращаются в нуль, имеет меру нуль, то внутренняя задача разрешима.

Доказывается, что в классе областей В. И. Смирнова решение внутренней задачи единственно.

Вопрос о разрешимости внешней задачи сводится к разрешимости в круге $|z|<1$ уравнения

$$\varphi'(z)/\varphi(z)=2\bar z/(1-|z|^2),$$

где $\varphi(z)$ — аналитическая, отличная от нуля в единичном круге, функция. Доказывается, что последнее уравнение разрешимо, если выполняется условие

$$\lim_{r\to1}[(1-r^2)\varphi(r,\theta)]=0\qquad(z=re^{i\theta}).$$

Автор утверждает, что последнее условие будет выполнено, если $u(s)$, $v(s)$ удовлетворяют условию Липшица, причем в конечном числе точек выполняется лишь условие Гёльдера с показателем $\lambda<1$. Однако приводимое им доказательство содержит ошибку (стр. 18). Именно из того, что $u(s)$ и $v(s)$ удовлетворяют условию Липшица не следует еще, вопреки утверждению автора, что модуль $|\omega'(s)|$ ограничен.

Вопрос о единственности решения внешней задачи остается открытым.

В примечании редакции «Уч. зап. Казанск. ун-та» отмечается, что результаты, весьма близкие к результатам §§ 3 и 4 реферируемой статьи (речь идет о разрешимости и единственности решения внутренней задачи), были независимо от автора получены референтом в 1951 г., работа которого с некоторыми изменениями опубликована в той же книге «Уч. зап. Казанск. ун-та» (РЖМат, 1955, 1175).

С. Н. Андрианов

2177. Об истечении плоской струи из щели в препятствии. Марки (Sui fenomeni di efflusso piano da luci a battente. Marchi Enrico), Ann. mat. pura ed appl., 1953, **35**, 327—341 (итал.)

Плоский однородный поток идеальной жидкости в направлении оси x $(0<y<b)$ со скоростью V_0 (при $x\to-\infty$) нарушается наклонным препятствием, оставляющим при $x=0$ для выхода струи лишь отрезок $(0, a)$ оси y, $a=b/n$. Скорость V_2 в точке $x=0$, $y=a$ составляет с осью x угол α $(0<\alpha\leqslant\pi/2)$. При $x\to+\infty$ скорость V_1 истекающей струи с учетом силы тяжести выражается формулой

$$V_1=\sqrt{2g\left(b+\frac{V_0^2}{2g}-C_c a\right)},$$

где $C_c a$ — высота струи при $x\to+\infty$ $(0<C_c<1)$, а $V_2=\nu V_1$, где

$$\nu=\sqrt{1-\frac{1-C_c}{n}-\frac{C_c(1-C_c)}{n^2}}.$$

Годограф скоростей в плоскости $V=V_x-iV_y$ представляет собой кривую, проходящую между дугами окружностей радиусов V_1 и V_2, причем радиус-вектор точки годографа монотонно убывает от V_1 до V_2 при возрастании угла от 0 до α. Считая $1-\nu$ величиной, малой по сравнению с 1, автор заменяет эту кривую такой, которая переходит при конформном отображении $\eta=V^{\pi/(2\alpha)}$ в четверть эллипса с полуосями $V_1^{\pi/(2\alpha)}$ и $V_2^{\pi/(2\alpha)}$. Далее область плоскости η, ограниченная указанной четвертью эллипса и соответствующими полуосями, конформно отображается на полосу $0<\psi<q$, где $q=V_0 b$ (расход жидкости в потоке), $-\infty<\varphi<+\infty$, плоскости комплексного потенциала $W=\varphi+i\psi$. На основании получающихся элементарных преобразований (исходя из того, что комплексный потенциал W известен) автор выводит уравнение линии свободной поверхности струи для $x>0$ (являющееся, конечно, приближенным в силу сделанной выше замены):

$$Z=\int\frac{dW}{V}+\text{const}=\frac{4}{\pi}(k^2-1)\frac{C_c a}{(1-\varepsilon)^{2\alpha/\pi}}\times$$

$$\times\int\frac{\omega^{(\pi+2\alpha)/\pi}\left(1-\varepsilon\omega^{-2}\right)^{2\alpha/\pi}(\omega^2+1)}{(\omega^2-m^2)(\omega^2-m^{-2})(\omega^2-1)}d\omega,$$

где

$$\varepsilon=\frac{1-\nu^{\pi/(2\alpha)}}{1+\nu^{\pi/(2\alpha)}},\quad k^2=\frac{1}{2}(m^2+m^{-2})$$

и $m>1$ определяется из соотношения $m-\varepsilon m^{-1}=(n^{-1}C_c)^{-\pi/(2\alpha)}2\nu^{\pi/2\alpha}\left(1+\nu^{\pi/(2\alpha)}\right)^{-1}$. При π/α целом оказывается возможным сравнительно несложный приближенный подсчет коэффициента C_c. Результаты при $\alpha=\pi/2$, $\pi/3$, $\pi/4$ и $\pi/6$ для $n=2$, 3, 5, 7, 10 и ∞ сравниваются с результатами Чизотти и Мизеса (Cisotti U., Rend. Circolo mat. Palermo, 1908, **25**, 145—179; Mises R., Z. Vereines dtsch. Ingr., 1917, **61**), от которых они отличаются не более чем на 2%.

В. И. Левин

2178. Новое направление в теории абелевых функций. Конфорто (Un nuovo indirizzo nella teoria delle funzioni abeliane. Conforto Fabio), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **1**, 141—163 (итал.)

Реферируемая статья является изложением доклада по теории абелевых модулярных функций, сделанного автором на IV математическом конгрессе в Италии. Как известно, теория абелевых модулярных функций возникла из работ Зигеля (1935 г.), связанных с арифметической теорией квадратичных форм. Позднее Зигелем было дано изложение теории абелевых модулярных функций, не зависимое от теории квадратичных форм (Siegel C. L., Math. Ann., 1939, **116**, 617—657).

Модулярная группа, рассмотренная Зигелем, может быть описана следующим образом. Обозначим через H совокупность комплексных симметрических матриц $Z=X+iY$, где Y — матрица положительно определенной квадратичной формы. Как показал Зигель, отображение

$$Z\to(AZ+B)(CZ+D)^{-1},$$

$$M=\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix}0 & E\\ -E & 0\end{pmatrix},$$

$$M'IM=I,$$

является аналитическим автоморфизмом H, причем в таком виде может быть представлен любой аналитический автоморфизм H. Следовательно, вещественная симплектическая группа является группой всех аналитических автоморфизмов H. Модулярная группа, введенная Зигелем, состоит из всех целочисленных симплектических матриц M.

Автор ввел более общий класс модулярных групп, а именно группы, состоящие из всех симплектических матриц M, для которых матрица UMU^{-1} целочисленна, где $U=\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & D\end{pmatrix}$, $D=\begin{pmatrix}d_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & d_p\end{pmatrix}$. Показано, что теория абелевых функций естественно приводит к рассмотрению таких групп. Автор указывает, что построение фундаментальной области для таких групп проведено в прочитанном им курсе лекций (Funzioni abeliane modulari. Docet edizioni univ., Roma, 1951). Это построение проводится примерно так же, как в работах Зигеля. Существенным осложнением является необходимость рассмотрения теории приведения квадратичных форм при помощи не всей унимодулярной группы, а ее некоторых подгрупп, а именно состоящих из тех целочисленных матриц M, для которых DMD^{-1} также является целочисленной. Однако это осложнение носит технический, а не принципиальный характер.

В конце статьи отмечается, что в настоящее время теория абелевых модулярных функций находится в зачаточном состоянии, и указывается ряд проблем, на которые, быть может, прольется свет при дальнейшем развитии этой теории. В частности, отмечается классическая проблема об условиях, при которых матрица периодов поля абелевых функций есть матрица периодов интегралов 1-го рода для некоторой кривой рода p ($p \geqslant 4$). *И. И. Пятецкий-Шапиро*

2179. **Интегральные теоремы и формулы в алгебрах гиперкомплексных чисел.** Риццa (Teoremi e formule integrali nelle algebre ipercomplesse. Rizza Giovanni Battista), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 204—209 (итал.)

Пусть A — алгебра над полем действительных чисел с базисом $i_1, \ldots, i_n$. Функция $u = \sum_1^n u_k i_k \left(v = \sum_1^n v_k i_k\right)$ от $x = \sum_1^n x_k i_k$ называется регулярной справа (слева), если u_k (v_k) — действительные функции от $x_1, \ldots, x_n$, имеющие непрерывные первые частные производные в некоторой области R_n и такие, что

$$\sum_1^n \frac{\partial u}{\partial x_k} i_k = 0 \left(\sum_1^n i_k \frac{\partial v}{\partial x_k} = 0\right)$$

(обобщенные условия Коши—Римана). Если V_{r+1} — ориентированное $(r+1)$-мерное многообразие в R_n ($r \leqslant n-1$) и Γ_r — положительно ориентированный контур V_{r+1}, то

$$\int_{\Gamma_r} u\, dX_{[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1-r}]} v = \sum_{s=1}^{n-1-r} (-1)^s \times$$

$$\times \int_{V_{r+1}} \frac{\partial u}{\partial x_{a_s}}\, dX_{[a_1, \ldots, a_{s-1}, a_{s+1}, \ldots, a_{n-1-r}]} v +$$

$$+ u\, dX_{[a_1, \ldots, a_{s-1}, a_{s+1}, \ldots, a_{n-1-r}]} \frac{\partial v}{\partial x_{a_s}},$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1-r}$ — упорядоченное подмножество множества $1, 2, \ldots, n$ и $dX_{[a_1, a_2, \ldots, a_{n-1-r}]}$, $dX_{[a_1, \ldots, a_{s-1}, a_{s+1}, \ldots, a_{n-1-r}]}$ — некоторые дифференциальные гиперкомплексные формы. Если функции u и v регулярны и Γ_{n-1} — гиперповерхность, гомологичная нулю в R_n, то

$$\int_{\Gamma_{n-1}} u\, dX = 0 \left(\int_{\Gamma_{n-1}} dX v = 0\right),$$

$$dX = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu i_\nu\, d(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_n).$$

Функция $w(x)$ называется моногенной функцией от $x = \sum_1^n x_h i_h$, если производная w по x по всем направлениям одинакова. Если алгебра A коммутативна и имеет единицу, то для моногенности функции w необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\int_{\Gamma_1} w\, dx = 0 \left(dx = \sum_1^n dx_h i_h\right)$$

для любого одномерного цикла Γ_1, гомологичного нулю в R_n. Дано обобщение интегральной формулы Коши на алгебры рассматриваемого типа.

Н. Я. Виленкин

2180. **Вполне дифференцируемые функции в алгебре n-потенциальных чисел.** Спампинато (Le funzioni totalmente derivabili nell'algebra dei numeri n-potenziali. Spampinato Nicolò), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 220—231 (итал.)

Пусть A — алгебра с единицей u над полем комплексных чисел, $\zeta = zu + z_1 u_1 + \ldots + z_{n-1} u_{n-1}$ — элемент алгебры и

$$\Phi(\zeta) = f_0(z, z_1, \ldots, z_{n-1})\, u + \cdots$$

$$\cdots + f_{n-1}(z, z_1, \ldots, z_{n-1})\, u_{n-1}$$

— функция от ζ. В реферируемой работе устанавливаются условия на функции $f_0, \ldots, f_{n-1}$, при которых $\Phi(\zeta)$ вполне дифференцируема (Spampinato N., Atti Accad. naz. Lincei. Rend., 1935, 21, 621—625). Например, если $\zeta = zu + z_1 u_1$, $u_1^2 = 0$, то Φ должна иметь вид $f(z)\, u + [f'(z)\, z_1 + \varphi(z)]\, u_1$, где $f(z)$ и $\varphi(z)$ — дифференцируемые функции комплексного переменного z. Указанные условия варьируются в зависимости от таблицы умножения алгебры A.

Н. Я. Виленкин

2181 К. **Теория аналитических функций.** Племель (Teorija analitičnih funkcij. Plemelj J., XVI+516 str., Ljubljana, Slovenska akademija znanosti in umetnosti, 1953), Elektrotehn. vesn., 1953, № 11—12, 372 (библ.)

2182 Д. **О соотношении между модулем производной и модулем функции при однолистном конформном отображении.** Ерышов С. П. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Саратовск. ун-т, Саратов, 1954

2183 Д. **Голоморфные функции со счетным числом аргументов и их применение к дифференциальным уравнениям.** Золотарев Ю. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казахск. ун-т, Алма-Ата, 1954

2184 Д. **Обратные краевые задачи теории аналитических функций и их приложения к механике.** Нужин М. Т., Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

2185 Д. **Мультипликативная структура аналитических J-нерастягивающих матриц-функций.** Потапов В. П. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1954

См. также: 2055, 2160, 2189, 2205, 2230, 2284, 2294, 2296.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2186. Об одной теореме разделения системы линейных дифференциальных уравнений. Ященко Н. Я., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 6, 965—967

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{dz_1}{dt} = A_1(t)\,z_1 + L_{11}(t)\,z_1 + L_{12}(t)\,z_2,$$
$$\frac{dz_2}{dt} = A_2(t)\,z_2 + L_{21}(t)\,z_1 + L_{22}(t)\,z_2, \qquad (1)$$

где z_1 — r-мерный, z_2 — $(n-r)$-мерный векторы, а $A_1(t)$, $A_2(t)$, $L_{ij}(t)$ $(i, j = 1, 2)$ — матрицы соответствующих порядков, определенные как функции переменного t на всей вещественной оси. Корни характеристических уравнений

$$\mathrm{Det}\,\|\,pE - A_k(t)\,\| = 0, \quad k = 1, 2,$$

таковы, что

$$\mathrm{Re}\;p_i(t) \leqslant \gamma_1 < \gamma_2 \leqslant \mathrm{Re}\;p_j(t),$$
$$i = 1, 2, \ldots, r; \quad j = r+1, r+2, \ldots, n,$$

γ_1, γ_2 — некоторые постоянные. Кроме того, $A_1(t)$ и $A_2(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2 предыдущей работы автора (РЖМат, 1955, 724) в случае, если $A(t) \equiv B(t)$ и $\gamma = \dfrac{\gamma_2 - \gamma_1}{2}$.

Пусть K_- и K_+ — значения постоянной K из вышеупомянутой теоремы для $A = A_1$ и $A = A_2$ соответственно. Имеет место теорема: Если матрицы L_{ij} $(i, j = 1, 2)$ непрерывны и для всех вещественных t удовлетворяют условию

$$|\,L_{ij}(t)\,| \leqslant L < \gamma/9K_+K_-,$$

то всегда можно указать такие ограниченные и непрерывные матрицы $B_1(t)$ и $B_2(t)$, что замена переменных

$$z_1(t) = \eta_1(t) + B_2(t)\,\eta_2(t),$$
$$z_2(t) = B_1(t)\,\eta_1(t) + \eta_2(t)$$

разделяет систему (1) на две независимые системы порядков r и $r-n$:

$$\frac{d\eta_1}{dt} = A_1(t)\,\eta_1 + L_{11}(t)\,\eta_1 + L_{12}(t)\,B_1(t)\,\eta_1,$$
$$\frac{d\eta_2}{dt} = A_2(t)\,\eta_2 + L_{21}(t)\,B_2(t)\,\eta_2 + L_{22}(t)\,\eta_2.$$

Эта теорема обобщает результаты С. Ф. Фещенко (Доповіді АН УРСР, 1951, № 3, 162—169).

В. В. Немыцкий

2187. О структуре решения системы n линейных дифференциальных уравнений в окрестности регулярной особой точки. Донская Л. И., Вестн. Ленингр. ун-та, 1954, № 8, 55—64

Рассматривается система n линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dX}{dt} = XP(t), \qquad (1)$$

где $P(t) = \sum_{k=1} P^{(k)} t^{-k}$, $P^{(k)}$ — постоянные матрицы, $P^{(1)}$ имеет каноническую форму, X — матрица фундаментальной системы решений, $t = \infty$ — регулярная особая точка системы.

В предположении, что среди характеристических чисел матрицы $P^{(1)}$ есть отличающиеся на целое число, доказывается существование решения системы (1) вида

$$X = t^W Z(t),$$

где W — постоянная матрица, $Z(t)$ — ряд по убывающим степеням независимого переменного, сходящийся в окрестности $t = \infty$. *К. Я. Латышева*

2188. К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения. Граф А. А., Сб. науч. тр. Харьковск. ин-та инж. коммун. стр-ва, 1954, № 5, 165—186

Устанавливаются некоторые зависимости между решениями дифференциальных систем и интегралами сопряженных с ними систем. Понятие сопряженной задачи отличается от общеизвестного тем, что решения сопряженных систем вводятся в предельные условия исследуемой системы. Доказываются теоремы:

1. Необходимым и достаточным условием существования единственного решения неоднородной дифференциальной системы

$$L_i(y_1, \ldots, y_n) \equiv \frac{dy_i}{dx} + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j = f(x) \qquad (1)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

с предельными условиями полилокального типа

$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu\mu}^{(i)} y_\mu(a_\nu) = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (1')$$

где a_ν — некоторые точки из отрезка непрерывности коэффициентов a_{ij}, является неравенство нулю детерминанта

$$\overline{\Delta} = |\,\overline{\varphi}_j^{(i)}\,|_1^n,$$
$$\varphi_j^{(i)} = \sum_\nu \varphi_{a_{\nu,i}}^{j}, \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

где $\varphi_{a_{\nu,i}}^{j}$ — решения сопряженной системы

$$\overline{L}_i(z_1, \ldots, z_n) \equiv \frac{dz_i}{dx} - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}z_j = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

с начальными условиями $\overline{\varphi}_{a_{\nu p}}^{(i)}\big|_{x=a_\nu} = \alpha_{\nu p}^{(i)}$.

2. Чтобы однородная система

$$L_i(y_1, \ldots, y_n) = 0,$$
$$\sum_{\nu=1}^{n}\sum_{\mu=1}^{n} \alpha_{\nu\mu}^{(i)} y_\mu(a_\nu) = 0$$

обладала μ-кратным решением, необходимо и достаточно, чтобы детерминант $\overline{\Delta}$ был ранга $n-\mu$. Если детерминант $\overline{\Delta}$ равен нулю, то неоднородная система (1), (1′) обладает решениями тогда и только тогда, когда матрица $\left\| \sum_{v=1}^{n} \overline{\varphi}_{v,j}^{(i)} \right\|$ и расширенная матрица

$$\left\| \sum_{v=1}^{n} \overline{\varphi}_{a_v,i}^{(i)},\ \gamma_i + \sum_{v=1}^{k} \int_{a_v}^{x} \left[\sum_{g=1}^{n} f_v(s) \overline{\varphi}_{a_v,i}^{(i)}(s) \right] ds \right\|$$

имеют один и тот же ранг.

Эти теоремы сформулированы также для системы (1) с предельными условиями интегрального типа

$$\int_a^b \left[\sum_{p=1}^{n} \alpha_p^{(i)}(\lambda)\, y_p(\lambda) \right] d\lambda = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Аналогичные теоремы сформулированы для однородных и неоднородных дифференциальных систем, порождаемых дифференциальными операторами

$$L_n(y) \equiv \rho_{nn} \frac{d}{dx} L_{n-1}(y) + \sum_{j=0}^{n-1} \rho_{nj} L_j(y),$$

$$L_0(y) \equiv \rho_{00} y,$$

$$L_k(y) \equiv \rho_{kk} \frac{d}{dx} L_{k-1}(y) + \sum_{j=0}^{k-1} \rho_{kj} L_j(y)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, n-1)$$

с предельными условиями полилокального и интегрального типов. Эти результаты ранее были получены автором для дифференциальных систем, порождаемых дифференциальными операторами

$$D_v y \equiv P_n \frac{d}{dx} P_{n-1} \frac{d}{dx} \cdots P_1 \frac{d}{dx} P_0 y;\quad L_0(y) \equiv P_{00} y,$$

$$L_n(y) \equiv P_{nn} \frac{d}{dx} L_{n-1}(y) + \sum_{j=0}^{n-1} P_{nj} L_j(y)$$

(Матем. сб., 1946, **18**, № 2, 305—323; 1947, **21**, № 1, 143—159).

Чтение работы сильно затрудняется многочисленными опечатками. Многие доказательства изложены весьма кратко. *М. Я. Ятаев*

2189. Некоторые свойства решений уравнения $w' = a(z) + b(z)w + c(z)w^2$. Виттих (Einige Eigenschaften der Lösungen von $w' = a(z) + b(z)w + c(z)w^2$. Wittich H.), Arch. Math., 1954, **5**, № 1—3, 226—232 (нем.)

Рассматриваются некоторые свойства роста и ветвления однозначных и аналитических в $|z| < \infty$ решений уравнения Риккати

$$w' = a(z) + b(z)\, w + c(z)\, w^2. \qquad (1)$$

Устанавливается, что в общем случае каждое нерациональное решение уравнения (1) имеет бесконечно много полюсов; точнее, можно показать, что два любых значения w_1 и w_2 встречаются одинаково часто в том смысле, что

$$\lim_{r \to \infty} \frac{n(r, w_1)}{n(r, w_2)} = 1,$$

где $n(r, w_i)$ — число корней уравнения $w - w_i = 0$ в круге $|z| < r$.

Вводя индекс Φ_e алгебраического ветвления в конечном и дефект $\delta(k_j)$ исключительного значения k_j, автор показывает, что все решения уравнения (1) удовлетворяют точному дефектному соотношению

$$\Phi_e + \sum_j \delta(k_j) = 2.$$

Главный результат относительно роста решений выражен в теоремах:

1. Для каждого нерационального решения $w = w(z)$ уравнения (1) в выражении

$$B(z) = a(z)\, c(z) - \frac{b^2(z)}{4} + \frac{b'(z)}{2} - \frac{b(z)}{2} \frac{c'(z)}{c(z)} = B_0 z^d \left[1 + \left(\frac{1}{z} \right) \right]$$

показатель d не меньше чем -1, а порядок среднего типа функции $w = w(z)$ не больше чем $\lambda = 1 + \frac{d}{2}$ (в примечании к теореме дано, что $d \geqslant 0$).

2. Если $R(w, z)$ рационально относительно z и w, то каждая алгебраическая функция, однозначная при $|z| < \infty$, порядок которой меньше $1/2$ и которая удовлетворяет дифференциальному уравнению $w' = R(w, z)$, есть рациональная функция. Эта теорема может быть получена из теоремы Мальмквиста.

К. Я. Латышева

2190. О движении частицы в сопротивляющейся среде переменной плотности. Леймanис (On the motion of a particle through a resisting medium of variable density. Leimanis Eugene), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 2, 117—119 (англ.)

Уравнение $\frac{d^2z}{dt^2} = g - f(z) \left(\frac{dz}{dt} \right)^n$ подстановкой $dz/dt = u^{-1/2}$ приведено к виду

$$\frac{du}{dz} = -2gu^2 + 2f(z)\, u^{2-n/2}. \qquad (1)$$

Для $n = 4, 2, 1, 0, -2$ указаны некоторые виды функции $f(z)$, когда уравнение (1) интегрируется в квадратурах. *В. В. Румянцев*

2191. Некоторые критерии эквивалентности траекторий и полутраекторий динамических систем. Врублевская И. Н., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 2, 197—200

Рассматривается динамическая система $f(p, t)$ в метрическом пространстве R. Автор пользуется терминологией своей предыдущей заметки (см. РЖМат, 1955, 1197). Особая точка O называется положительно (отрицательно) асимптотически устойчивой, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что: 1) для любых $p \in Q(0, \delta)$ и $\sigma > 0$ найдется такое $t_p > 0$ (соответственно $t_p < 0$), что $f(p, t_p) \in Q(0, \sigma)$; 2) $f(Q(0, \delta);\ 0, +\infty) \subset Q(0, \varepsilon)$ (соответственно $f(Q(0, \delta);\ -\infty, 0) \subset Q(0, \varepsilon)$).

Область притяжения положительно (отрицательно) асимптотически устойчивой точки O есть совокупность всех точек $p \in R - \{0\}$ таких, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $t_p > 0$ (соответственно $t_p < 0$), для которого $f(p, t_p + \infty) \subset Q(0, \varepsilon)$ (соответственно

$f(p, -\infty, t_p) \subset Q(0, \varepsilon)$). Множество называется линейно связным, если для любых его точек p и q существует непрерывное отображение сегмента [0,1] на это множество, причем числам 0 и 1 соответствуют точки p и q.

Теорема 1. Пусть O — положительно (отрицательно) асимптотически устойчивая особая точка. Если область притяжения точки O линейно связна, то любые две положительные (отрицательные) полутраектории, содержащиеся в этой области, кинематически эквивалентны и, следовательно, геометрически эквивалентны.

Далее в работе сформулирован целый ряд других критериев эквивалентности траекторий в основном для плоских динамических систем, из которых укажем на два критерия. Множество L называется элементарным инвариантным множеством для плоской динамической системы, если оно состоит из конечного числа $m_1 \geqslant 0$ особых точек $O_1, O_2, \ldots, O_{m_1}$ и конечного числа $m_2 \geqslant 1$ обыкновенных траекторий $L_1, L_2, \ldots, L_{m_2}$, причем, если $m_1 = 0$, то $m_2 = 1$ и L есть цикл, если же $m_1 \neq 0$, то траектория L_k имеет единственной ω-предельной точкой одну из точек O_i и единственной α-предельной точкой также одну из точек O_i. Пусть L-элементарное инвариантное множество и O — не принадлежащая L особая точка. Две траектории l_0, l_1 удовлетворяют условию (В), если l_0 и l_1 имеют множество L своим α-предельным (ω-предельным) множеством, точку O своей единственной ω-предельной (α-предельной) точкой и в области, ограниченной множеством $l_0 \cup l_1 \cup L \cup \{O\}$, нет особых точек и нет траекторий, имеющих точку O своей α-предельной (ω-предельной) точкой.

Теорема 8. В плоской динамической системе, определяемой системой дифференциальных уравнений, любые две траектории, удовлетворяющие условию (В), геометрически эквивалентны. Пусть L_1, L_2 — элементарные инвариантные множества. Две траектории l_0, l_1 удовлетворяют условию (С), если l_0 и l_1 имеют L_1 своим α-предельным множеством, L_2 своим ω-предельным множеством и в области, ограниченной множеством $l_0 \cup l_1 \cup L_1 \cup L_2$, нет особых точек.

Теорема 9. В плоской динамической системе, определяемой системой дифференциальных уравнений, любые две траектории, удовлетворяющие условию (С), геометрически эквивалентны.

На основании полученных результатов для грубой динамической системы на плоскости (Андронов А., Понтрягин Л., Докл. АН СССР, 1937, 14, № 5, 247—250) выясняется связь между геометрическими ячейками (см. РЖМат, 1955, 1197) и ячейками в смысле Андронова и Понтрягина, формулируемая автором в виде теоремы: В грубой динамической системе на плоскости: а) любая ячейка в смысле Андронова и Понтрягина есть геометрическая ячейка и любая особая траектория есть геометрическая ячейка; б) всякая геометрическая ячейка есть либо ячейка в смысле Андронова и Понтрягина, либо особая траектория. *М. И. Грабарь*

2192. О сохранении условно периодических движений при малом изменении функции Гамильтона. Колмогоров А. Н., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 4, 527—530

Рассматривается каноническая система уравнений

$$\frac{dq_\alpha}{dt} = \frac{\partial}{\partial p_\alpha} H(q, p, \theta), \quad \frac{dp_\alpha}{dt} = -\frac{\partial}{\partial q_\alpha} H(q, p, \theta).$$

Координаты q считаются круговыми, именно: функция Гамильтона имеет период 2π по координатам q. Функция $H(q, p, \theta)$ аналитична по совокупности переменных p, q, θ. Кроме того, предполагается, что $p = 0$ находится в области аналитичности функции $H(q, p, \theta)$. Сначала устанавливается

Теорема 1. Пусть

$$H(q, p, 0) = m + \sum_\alpha \lambda_\alpha p_\alpha + \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta}(q)\, p_\alpha p_\beta + O(|p|^3),$$

где m и λ_α — константы, и при некотором выборе констант $c > 0$ и $\eta > 0$ для всех целочисленных векторов n выполняется неравенство

$$(n, \lambda) \geqslant c\,|n|^{-\eta}, \tag{1}$$

где (n, λ) — скалярное произведение векторов n и λ, а $|n|$ — длина вектора n. Пусть, кроме того, детерминант, составленный из средних значений

$$\Phi_{\alpha\beta}(0) = (2\pi)^{-s} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} \Phi_{\alpha\beta}(q)\, dq_1 \ldots dq_s$$

функций $\Phi_{\alpha\beta}(q) = \partial^2 H(q, 0, 0) / \partial p_\alpha \partial p_\beta$ отличен от нуля. Тогда существуют определенные для всех достаточно малых θ и для всех точек (Q, P) некоторой окрестности V множества $\{p = 0\}$ аналитические функции $F_\alpha(Q, P, \theta)$ и $G_\alpha(Q, P, \theta)$, осуществляющие преобразование прикосновения

$$q_\alpha = Q_\alpha + \theta F_\alpha(Q, P, \theta), \quad p_\alpha = P_\alpha + \theta G_\alpha(Q, P, \theta)$$

окрестности V в $V' \subseteq G$, которое приводит H к виду

$$H = M(\theta) + \sum_\alpha \lambda\, P_\alpha + O(|P|^2).$$

Эта теорема показывает, что при малых изменениях функции Гамильтона s-параметрическое семейство условно периодических движений $q_\alpha = \lambda_\alpha t + q_\alpha^{(0)}$; $p_\alpha = 0$, существующее при $\theta = 0$, не может исчезнуть. В формулировке теоремы обращает на себя внимание неравенство (1), характеризующее в известном смысле «общее положение» набора частот. Во второй теореме автор показывает, что при малых θ полученные в соответствии с теоремой 1 сдвинутые торы, заполненные условно периодическими движениями, будут достаточно плотно в смысле меры заполнять окрестность точки $\theta = 0$.

В. В. Немыцкий

2193. Метод вращающих функций Ляпунова для разыскания колебательных режимов. Немыцкий В. В., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 1, 33—36

Устанавливаются достаточные условия существования колебательных и периодических режимов динамической системы внутри торовидной области.

Замкнутая область G n-мерного пространства называется торовидной, если она получается из топологического тора или сферической окрестности окружности T путем исключения не более чем конечного числа областей, целиком погруженных в T. Колебательным режимом относительно области G

называется режим, определяемый траекторией $\varphi(P,t)$ динамической системы $dx_i/dt = f_i(x_1,\ldots,x_n)$, целиком погруженной в G и удовлетворяющей условиям:

а) $\varphi(P,t)$ устойчива по Пуассону; б) существует такое число $\tau_0 > 0$, что за промежуток времени $\tau_q \leqslant \tau_0$ точка $q = \varphi(P,t)$ один и только один раз пересечет каждую меридиональную поверхность. Автор указывает, что на основании работы Фуллера (Fuller F. B., Ann. Math., 1952, 56, № 3, 438—439) наличие торообразной области, в которую входят все траектории, не обеспечивает существования ни периодического, ни колебательного режимов в этой области, и устанавливает две теоремы, дающие достаточные критерии существования такого рода режимов.

Функция

$$V(x_1,\ldots,x_n) = F_1(x_1,\ldots,x_n)/F_2(x_1,\ldots,x_n)$$

называется вращающей функцией Ляпунова относительно замкнутой области G, если выполнены условия: 1) F_1 и F_2 — непрерывно дифференцируемые функции в G; 2) уравнение $F_1 - CF_2 = 0$, $-\infty \leqslant C \leqslant +\infty$, есть уравнение пучка поверхностей, ось которого не проходит через точки G, причем поверхности $V = +\infty$ и $V = -\infty$ совпадают с поверхностью $F_2 = 0$; 3) каждая поверхность пучка $F_1 - CF_2 = 0$ пересекает G; 4) каждая точка G принадлежит одной из поверхностей пучка. Тогда в силу уравнений $dx_i/dt = f_i(x_1,\ldots,x_n)$

$$dV/dt = \Gamma(x_1,\ldots,x_n)\,C^2.$$

На поверхности $V = 0$ эта производная имеет вид

$$(dV/dt)_0 = B(x_1,\ldots,x_n).$$

Доказывается теорема: Если через все граничные точки торовидной области G, не содержащей особых точек, все траектории системы входят внутрь и если относительно G существует вращающая функция Ляпунова $V=C$, для которой $|\Gamma| > a^2 > 0$ и $|B| > \alpha^2 > 0$ для точек G, то G содержит колебательный режим.

Далее без доказательства приводится теорема: Пусть G — торовидная область, пусть она имеет сечение $S^{(n-1)}$, являющееся элементом размерности $n-1$, и пусть этот же элемент является локальным сечением потока траекторий, проходящего через $S^{(n-1)}$. Если каждая траектория $\varphi(P,t)$, начинающаяся из точек $S^{(n-1)}$, для некоторого значения $t = \omega$ снова возвращается на $S^{(n-1)}$, то внутри G имеется периодическое решение. Локальным сечением потока траекторий автор называет замкнутое множество S, если существует такое число T, не зависящее от выбора точки S, что всякая дуга $f(P,-T,+T)$ траектории $\varphi(P,t)$, выходящая из S при $t = 0$, имеет с S только одну общую точку.

Приводится пример, иллюстрирующий обе теоремы.

И. Г. Малкин

2194. Об устойчивости регулируемых систем с двумя органами управления. Дувакин А. П., Летов А. М., Прикл. матем. и механика, 1954, **17**, № 2, 163—166

Рассматриваются вопросы устойчивости для системы дифференциальных уравнений автоматического регулирования

$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha}x_\alpha + \sum_{s=1}^{2} u_{si}\varphi_s(\sigma_s) \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\sigma_s = \sum_{\alpha=1}^{n} j_{s\alpha}x_\alpha \quad (s = 1,2),$$

где $b_{i\alpha}$, u_{si}, $j_{s\alpha}$ — постоянные, причем корни λ_i уравнения $\|b_{i\alpha} - \delta_{i\alpha}\lambda\| = 0$ различны и $\operatorname{Re}\lambda_i < 0$ $(i = 1,2,\ldots,n)$. Функции $\varphi_s(\sigma_s)$ — непрерывны и удовлетворяют условиям $\varphi_s(0) = 0$, $\sigma_s\varphi_s(\sigma_s) > 0$ при $\sigma_s \neq 0$.

Задача устойчивости решается построением функции Ляпунова V (метод построения такой функции для системы уравнений с одной нелинейной функцией $\varphi(\sigma)$ дан в работе Малкина, Прикл. матем. и механика, 1951, **15**, № 1, 59—66):

$$V = F + 2\int_0^{\sigma_1}\varphi_1(\sigma_1)\,d\sigma_1 + 2\int_0^{\sigma_2}\varphi_2(\sigma_2)\,d\sigma_2.$$

Здесь $F = \sum_{\alpha,\beta=1}^{n} B_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ — квадратичная форма, для которой

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial F}{\partial x_i}\left(\sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha}x_\alpha\right) = -\sum_{\alpha,\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$$

— определенно отрицательная квадратичная форма.

Доказывается, что невозмущенное движение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ асимптотически устойчиво при любых начальных возмущениях, если выполняются перечисленные условия и положительны последние главные миноры определителя, элементы которого выражаются через $b_{i\alpha}$, j_{ki}, $B_{i\alpha}$, u_{ki}.

Для системы регулирования $n+2$-го порядка

$$\dot{x}_i = \sum_{\alpha=1}^{n} b_{i\alpha}x_\alpha + \sum_{s=1}^{2} u_{si}\varphi_s(\sigma_s) \quad (i = 1,2,\ldots,n),$$

$$\dot{x}_{n+s} = \varphi_s(\sigma_s), \quad \sigma_s = \sum_{\alpha=1}^{n+2} j_{s\alpha}x_\alpha \quad (s = 1,2),$$

где функции $\varphi_s(\sigma_s)$ аналитические; удовлетворяют прежним условиям, не содержат линейных членов и таковы, что $\int_0^{\sigma_s}\varphi_s(\sigma)\,d\sigma \to \infty$ при $\sigma_s \to \pm\infty$, даются достаточные условия устойчивости того же характера.

Рассматривается пример применения полученных результатов к некоторой системе четырех дифференциальных уравнений.

Н. Н. Красовский

2195. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями в пространстве m измерений. Ура (Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace à m dimensions. Ura Taro), Ann. scient. École norm. supér., 1953, **70**, № 4, 287—360 (франц.)

Изучается поведение интегральных кривых системы дифференциальных уравнений

$$dx_i/dt = X_i(x_1,x_2,\ldots,x_n), \quad i = 1,2,\ldots,m,$$

где X_i непрерывно дифференцируемы. В первой главе рассматриваются общие вопросы, связанные с проблемой существования и продолжаемости решений, подробно доказывается один из вариантов теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий, дается определение поверхности без кон-

такта и изучается поведение кривых вблизи этой поверхности. Вторая глава посвящена изучению ω и α-предельных множеств, замыканий положительных и отрицательных полутраекторий и инвариантных множеств. Рассмотрены вопросы продолжения. Точка Q называется точкой положительного косвенного продолжения точки P, если существует последовательность $\{P_n\}$ точек и последовательность $\{t_n\}$ неотрицательных чисел таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$, $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(t_n) = Q$. Аналогично определяются точки отрицательного косвенного продолжения. Показывается, например, что множество точек положительного косвенного продолжения точки P является связным, замкнутым множеством и содержит в себе замыкание положительной полутраектории, выходящей из точки P; изучаются и другие способы продолжения. Вводятся различные типы устойчивости множеств фазового пространства. Например, замкнутое инвариантное множество M называется слабо устойчивым в положительном направлении, если для всякой окрестности $U(M)$ существует другая окрестность $V(M)$ такая, что замыкание $K^+(V)$ всех положительных полутраекторий, выходящих из $V(M)$, лежит в окрестности $U(M)$. Заменяя в этом определении множество $K^+(V)$ множеством всех точек положительного косвенного продолжения точек из $V(M)$, автор приходит к аналогичному понятию сильной устойчивости множества M. Инвариантное множество M автор называет центром в смысла Бендиксона, если совокупность ω и α-предельных точек любой точки P, не лежащей в M, не имеет общих точек с M. Указано, что инвариантное и замкнутое множество M будет тогда и только тогда центром в смысле Бендиксона, когда оно слабо устойчиво в обоих направлениях. Доказывается также, что из сильной устойчивости вытекает слабая устойчивость.

В конце работы теория применяется к изучению интегральных кривых на плоскости, в частности получаются известные результаты Бендиксона.

Е. А. Барбашин

2196. Об условиях существования центра. Белюстина Л. Н., Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 4, 511

Указывается, что известные из работ Н. Н. Баутина (Докл. АН, 1939, **14**, № 7, 668—671), Н. А. Сахаринкова (Прикл. матем. и механика, 1948, **12**, № 5, 669—670) и др. условия существования центра в точке (0,0) для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x + A_{11}x^2 + A_{12}xy + A_{22}y^2}{y + B_{11}x^2 + B_{12}xy + B_{22}y^2}$$

могут быть подвергнуты алгебраическим преобразованиям, в результате которых получается иная форма тех же условий, не требующая в отличие от них для своего применения предварительного поворота координатных осей. Приведены окончательные результаты, самые преобразования не даны. Имеются опечатки, в частности, в библиографии.

И. П. Макаров

2197. Заметка об оценке числа точек покоя динамических систем с запаздывающим аргументом. Эльсгольц Л. Э., Учен. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, **7**, 221—222

Приводятся некоторые соображения об оценке числа точек покоя систем вида

$$x_i'(t) = f_i\left(x_1(t-\tau_{11}(t)), \ldots, x_1(t-\tau_{1m_1}(t)), \ldots\right.$$
$$\left.\ldots, x_n(t-\tau_{n1}(t)), \ldots, x_n(t-\tau_{nm_n}(t))\right)$$
$$(i = 1, \ldots, n),$$

заданных на замкнутом n-мерном многообразии; эти оценки основаны на сравнении данной системы с обычной динамической системой, в которой положены все $\tau_{js}(t) \equiv 0$. К последней системе применимы предыдущие результаты автора (Матем. сб., 1946, 19, № 2, 237—238; 1950, 26, № 2, 215—223).

А. Д. Мышкис

2198. Обзор работ об условиях устойчивости тривиального решения системы линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами. Старжинский В. М., Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 4, 469—510

Систематизируются и сравниваются между собой критерии, достаточные для того, чтобы тривиальное решение линейной системы с периодическими коэффициентами было устойчивым в смысле Ляпунова. В большинстве критериев используется то, что тривиальное решение устойчиво, если все корни характеристического уравнения по модулю меньше 1, и неустойчиво, если по крайней мере один из них по модулю больше 1. При этом используется предложенный Ляпуновым метод нахождения коэффициента характеристического уравнения в виде ряда по степеням параметра λ, от которого зависит система дифференциальных уравнений, или обобщения этого метода. Критерии состоят в условиях на коэффициенты системы, выполнение которых влечет за собой устойчивость (неустойчивость), когда λ изменяется в некоторой открытой области. Рассмотрен также ряд критериев, полученных из других соображений.

В § 1 изложены результаты Ляпунова для одного уравнения

$$\ddot{x} + \lambda p(t)\, x = 0; \quad p(t+\omega) = p(t).$$

§ 2 посвящен более поздним исследованиям того же уравнения. В § 3 рассмотрено уравнение

$$\ddot{x} + q(t)\,\dot{x} + p(t)\,x = 0; \quad q(t+\omega) = q(t),$$
$$p(t+\omega) = p(t).$$

В §§ 4, 5 рассматриваются системы второго порядка, в §§ 6,7,8 — системы n-го порядка.

Библиография, 101 название. *Г. Л. Мизернюк*

2199. К вопросу об ограниченности решений дифференциального уравнения $y'' + p(x)y = 0$. Шварцман А. П., Прикл. матем. и механика, 1954, **18**, № 4, 464—488

Дополнение к работе М. Г. Крейна (Прикл. матем. и механика, 1951, **15**, № 3, 323—348), где был получен общий критерий ограниченности решений уравнения

$$y'' + p(x)\,y = 0, \quad p(x+\omega) = p(x), \qquad (1)$$

в котором фигурирует функция $\chi(t)$ — наименьший положительный корень уравнения

$$\sqrt{\chi}\,\mathrm{tg}\sqrt{\chi} = t/(1-t), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Для функции $\chi(t)$ М. Г. Крейном получены неравенства

$$t/(1-ct) \leqslant \chi(t) \leqslant t/(1-{}^2/_3 t) \quad (c = 1 - 4/\pi^2). \qquad (2)$$

Автор приводит таблицу значений $\chi(t)$. Из (2) и критерия М. Г. Крейна автор выводит простое условие ограниченности решений уравнения (1), дающее функции из нулевой области устойчивости:

$$p(x) \leqslant H, \quad 0 \leqslant \omega \int_0^{\omega} p(x)\,dx \leqslant 4 + \frac{16c}{H\omega^2}. \qquad (3)$$

Это улучшает критерий А. М. Гольдина (Прикл. матем. и механика, 1951, **15**, № 3, 379—381), в котором вместо $16c/H\omega^2 = 9{,}51/H\omega^2$ стоит $4/H\omega^2$. На примерах сравниваются критерии для нулевой области устойчивости А. М. Ляпунова, Н. Е. Жуковского, критерий (3) и соответствующий точный критерий М. Г. Крейна. *В. А. Якубович*

2200. Почти периодические решения уравнения Риккати. Халанай (Soluţii aproape-periodice ale ecuaţiei Riccati. Halanay A.), Studii şi cercetări mat., 1953, **4**, № 3—4, 345—354 (рум.; резюме русс., франц.)

Исследуются продолжаемые (т. е. непрерывные на всей оси) решения уравнения Риккати

$$y' + y^2 + p(t) = 0, \qquad (1)$$

где $p(t)$ — почти периодическая (п. п.) функция.

Если продолжаемые решения уравнения Риккати существуют и ограничены, то существуют два граничных продолжаемых решения $u(t)$ и $v(t)$ такие, что решения из области $v(t) < y < \infty$ продолжаемы вправо, но не продолжаемы влево; решения из области $-\infty < y < u(t)$ продолжаемы влево, но не продолжаемы вправо; все решения из области $u(t) < y < v(t)$ при $t \to \infty$ стремятся к $v(t)$; все решения из области $-\infty < y < v(t)$ при $t \to -\infty$ стремятся к $u(t)$.

Автор доказывает, что: 1) если $\inf(v(t) - u(t)) > 0$, то $u(t)$ и $v(t)$ — п. п. функции; 2) имеет место также обратная теорема; 3) средние значения обоих п. п. решений равны по абсолютной величине и противоположны по знаку: $M\{v\} = -M\{u\}$,

Замена переменных $y = x'/x$ преобразует уравнение (1) в уравнение вида

$$x'' + p(t)\,x = 0. \qquad (2)$$

Для (2) получается результат, аналогичный известной теореме Флокэ для уравнений с периодическими коэффициентами (однако только для неколеблющихся решений): если уравнение (1) имеет два п. п. решения, то существует фундаментальная система решений уравнения (2)

$$x_1 = e^{\mu t}\Phi_1(t), \quad x_2 = e^{-\mu t}\Phi_2(t),$$

где $\Phi_k(t) = \exp\int \alpha_k(t)\,dt$, $\alpha_k(t)$ — п. п. функции и $M\{\alpha_k\} = 0$. Доказывается новое достаточное условие существования продолжаемых решений.

И. М. Соболь

2201. Об одном асимптотическом свойстве интегралов одного дифференциального уравнения второго порядка. Миколайская З. (Sur une propriété asymptotique des intégrales d'une équation différentielle du second ordre. Mikolajska Z.), Бюл. Польск. АН, 1954, **2**, № 3, 111—113; Bull. Acad. polon. sci., 1954, **2**, № 3, 113—116 (франц.)

Рассматривается дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dt} f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = g\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right). \qquad (1)$$

При некоторых предположениях о функциях $f(t, x, y)$, $g(t, x, y)$ доказывается, что каждому числу c соответствует зависящее по крайней мере от одного параметра семейство решений уравнения (1), для которых

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = c.$$

Теорема автора является обобщением на нелинейный случай результата Винтнера (Wintner A., Duke Math. J., 1948, **15**, 55—67), относящегося к линейному уравнению

$$\frac{d}{dt}\left[p(t)\frac{dx}{dt}\right] = q(t)\,x.$$

Доказательство опирается на топологический метод Т. Важевского (Ważewski T., Ann. Soc. polon math., 1948, **20**, 279—313).

Примечание референта. Предложение автора может быть несколько дополнено: при сделанных предположениях у каждого решения $x(t)$ существует конечный предел при $t \to \infty$. Это утверждение, а также теорема автора в несколько более жестких предположениях о функциях f и g (вместо $|g(t, x, y)| \leqslant b(t)\cdot|x|$ требуем $|g(t, x_1, y) - g(t, x_2, y)| \leqslant b(t)|x_1 - x_2|$, $g(t, 0, y) = 0$ и аналогично для функции F, обратной к f) просто доказываются непосредственно. *В. А. Якубович*

2202. Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений второго порядка с запаздывающим аргументом. Каменский Г. А., Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, **7**, 195—204

Исследуется асимптотическое поведение решений уравнения

$$y''(x) - M(x)\,y(x - \Delta(x)) = P(x) \quad (A \leqslant x < \infty), \qquad (1)$$

где функции $M(x) \geqslant 0$, $P(x)$ и $\Delta(x) \geqslant 0$ заданы и непрерывны при $A \leqslant x < \infty$, причем

$$\int_A^{\infty} M(x)\,dx = \infty, \quad x - \Delta(x) \to \infty \quad (x \to \infty).$$

Доказано, что если $P(x) \geqslant 0$ или если $\underline{\lim} M(x) > 0$, $\sup\Delta(x) < \infty$ и $\int_A^{\infty} P(x)\,dx$ сходится, то для любого неотрицательного решения $y(x)$ будет: а) $y(x) \to \infty$, $y'(x) \to \infty$, либо б) $y(x) \to 0$, $y'(x) \to 0$. Если известно только, что интеграл $\int_A^{\infty} P(x)\,dx$ сходится, то вместо условия б) будет $\underline{\lim}\, y(x) = 0$, $y'(x) \to 0$. Если же дано, что

$$\underline{\lim} M(x) > 0, \quad \left|\int_A^x P(t)\,dt\right| < C \quad (A \leqslant x < \infty)$$

и $\Delta(x)$ удовлетворяет условию Липшица, то вместо условия б) будет $y(x) \to 0$, $|y'(x)| < C_1$ $(A \leqslant x < \infty)$.

Далее доказаны некоторые теоремы о сравнении решений однородных уравнений вида (1), на основании

которых получено, что если $y(x) \geqslant 0$ $(x \leqslant A)$ и

$$y'(A) > -\sqrt{m_0}\, y(A) \exp\left(-\sqrt{m_0}\,(\gamma(A) - A)\right),$$

где $m_0 = \inf M(x)$, а $\gamma(A) = \sup\limits_{x} (x - \Delta(x)) < A$ $(\gamma(A) = A$, если таких x нет), то $\lim\limits_{x\to\infty} y(x) = \lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = \infty$. Отсюда, в свою очередь, следует, что все решения уравнения (1) неустойчивы по Ляпунову. В заключение сообщается, что аналогично могут быть доказаны теоремы о поведении неотрицательных решений уравнения

$$y''(x) + M(x)\, y(x - \Delta(x)) = P(x) \quad (A \leqslant x < \infty).$$

Эти теоремы отличаются лишь тем, что случай а) в них не может представиться.

Опечатки: на стр. 197, строчка 4 снизу, вместо $\overline{M}(x)$ должно быть $-\overline{M}(x)$; на стр. 198, строчка 5 снизу, вместо $>$ должно быть $\geqslant$; на стр. 201, строчка 1 сверху, вместо $+E_0$ должно быть $+\overline{E}_0$.

А. Д. Мышкис

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

2203. Системы уравнений в частных производных, которые обобщают уравнения теплопроводности. Хиршман (Systems of partial differential equations which generalise the heat equation. Hirschman I. I.), Canad. J. Math., 1953, 5, № 1, 118—128 (англ.)

Для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial h} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}, \tag{1}$$

в области G_m: $(-\infty < x_i < +\infty,\ X = (x_1, \ldots, x_m),\ 0 \leqslant h \leqslant c)$, доказывается теорема: Если $u(X, h)$ удовлетворяет уравнению (1) для $X \in G_m$, $a < h < b$ и неотрицательна, то для любых h' и h'' таких, что $a < h' < h'' < b$, имеет место равенство

$$u(X, h'') = \left(4\pi(h'' - h')\right)^{-\frac{1}{2}m} \times$$

$$\times \int_{G_m} \exp\left[-\frac{1}{4(h'' - h')} \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2\right] u(Y, h')\, dY.$$

Далее рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial h_l} = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\, a_{ij}^l; \quad l = 1, 2, \ldots, n,$$

где $a_{ij}^l = a_{ji}^l$ — постоянные. Вводятся обозначения

$$H = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix},\ H_a = (h_{ij}),\ h_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{ij}^l h_l,$$

причем полагается $H_a' > H_a''$, если $H_a' - H_a''$ — положительно определенная матрица. Доказывается теорема: Пусть $u(X, H)$ имеет непрерывные частные производные в области $G_m \times \mathfrak{N}$, где $G_m = (-\infty < x_i < +\infty)$, $(i = 1, 2, \ldots, m)$, $\mathfrak{N}$ — открытое выпуклое подмножество пространства векторов, удовлетворяющее в этой области системе (2). Если $u(X, H) \geqslant 0$ для $X \in G_m$, $H \in \mathfrak{N}$, то для любых двух векторов H' и H'' из $\mathfrak{N}$, удовлетворяющих условию $H_a'' > H_a'$, справедливо равенство

$$u(X, H'') = \int_{G_m} k(Y - X,\ H_a'' - H_a')\, u(Y,\ H')\, dY,$$

где

$$k(X, T) = (4\pi)^{-m/2} |T|^{-1/2} \exp\left(\left|\begin{matrix} 0 & X^* \\ X & T \end{matrix}\right| \Big/ 4|T|\right)$$

$$T = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}, \qquad |T| = \left(\sum_{i=1}^{n} t_i^2\right)^{1/2},$$

Если не существует действительных векторов H' и H'' таких, что $H_a'' > H_a'$, то, как показывает пример системы

$$\frac{\partial u}{\partial h} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},$$

теорема перестает быть верной. *Л. И. Камынин*

2204. Задача Коши и первая краевая задача для квазилинейного уравнения параболического типа. Олейник О. А., Вентцель Т. Д., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 4, 605—608

Рассматривается квазилинейное параболическое уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = A(x; t, u) \frac{\partial u}{\partial t} + B(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} + F(x, t, u). \tag{1}$$

Теорема: в прямоугольнике $R\{0 \leqslant x \leqslant 1;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ существует единственное решение $u(x, t)$ уравнения (1), непрерывное в R вместе с производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющее условиям

$$u(x, 0) \equiv 0, \quad u(0, t) \equiv 0, \quad u(1, t) \equiv 0,$$

если выполнены следующие предположения:

а) для всех значений u в прямоугольнике R $A(x, t, u) \geqslant a > 0$, $F_u'(x, t, u) \geqslant c$, $|F(x, t, 0)| \leqslant M$, где a, c, M — некоторые постоянные;

б) в параллелепипеде $Q\{0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant t \leqslant T, |u| \leqslant M_1\}$ $(M_1 = Me^{\alpha T}/(\alpha a + c)$, α — положительное число, $\alpha a + c > 0)$ существуют и удовлетворяют условию Липшица по x, t, u производные первого порядка по всем аргументам от функций $A(x, t, u)$, $B(x, t, u)$, $F(x, t, 0)$, $F_u'(x, t, u)$ и все производные второго порядка от этих функций по переменным x, u; частные производные

$$A_{xt}'',\ A_{ut}'',\ A_{xxt}''',\ A_{txu}''',\ A_{tuu}''',\ A_{uxx}''',\ A_{xuu}''',\ A_{uuu}''' \tag{2}$$

и такие же производные от функций $B(x, t, u)$, $F(x, t, 0)$, $F_u'(x, t, u)$ существуют и удовлетворяют условию Липшица по x, t, u, когда $|u| \leqslant M_1$, а переменные t, x изменяются в любой замкнутой области, лежащей внутри R;

в) $F(0, 0, 0) = F(1, 0, 0) = 0$.

Для задачи Коши на бесконечной прямой доказана теорема: В полосе R_1 ($-\infty < x < +\infty, 0 \leqslant t \leqslant T$) существует единственное ограниченное решение $u(x, t)$ уравнения (1), непрерывное в R_1 вместе с производными, входящими в уравнение (1), и удовлетворяющее условию $u(x, 0) = u_0(x)$, где $u_0(x)$ — ограниченная функция вместе со своими производными первого и второго порядка при $-\infty < x < +\infty$, если выполнены предположения:

а) в полосе R_1 для всех значений u

$$A(x, t, u) \geqslant a > 0, \quad F'_u \geqslant c, \quad |F(x, t, 0)| \leqslant M$$

(a, c, M — некоторые постоянные);

б) функции $A(x, t, u)$, $B(x, t, u)$, $F(x, t, 0)$, $F'_u(x, t, u)$ и их частные производные первого и второго порядка по x и u равномерно ограничены в $Q_1\{-\infty < x < +\infty;\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ |u| \leqslant M_1\}$ и удовлетворяют условию Липшица по x, t, u в каждой конечной области, содержащейся в Q_1; производные первого порядка по t от этих функций тоже удовлетворяют условию Липшица по всем аргументам в любой конечной области, содержащейся в Q_1; производные (2) и такие же производные от функций $B(x, t, u)$, $F(x, t, 0)$ и $F'_u(x, t, u)$ существуют и удовлетворяют условию Липшица по x, t, u в любой конечной замкнутой области, лежащей в Q_1 и не содержащей точек прямой $t = 0$.

Л. И. Камынин

2205. Об исключительном множестве некоторой функции, гармонической внутри единичной сферы. Цудзи (On the exceptional set of a certain harmonic function in a unit sphere. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 3—4, 307—320 (англ.)

Пусть Δ — внутренность единичной сферы S, $u(P)$ — гармоническая функция в Δ и

$$\iiint\limits_{\Delta} |\operatorname{grad} u(P)|^2 \frac{dv}{\sqrt{1-r^2}} < \infty, \quad r = \overline{OP}.$$

Автор доказывает, что для всех точек $Q \in S$, кроме исключительного множества E емкости нуль, существует конечный $\lim\limits_{P \to Q} u(P)$ при приближении к Q внутри конуса с вершиной в Q, лежащего в Δ. При этом стремление к пределу равномерно в указанном конусе. Кроме того,

$$\int_l |\operatorname{grad} u(P)|\, ds < \infty,$$

где l — отрезок, соединяющий Q с внутренней точкой Δ.

Соответствующая теорема для гармонических функций в круге была автором доказана ранее (Tôhoku Math. J., 1950, 2, 113—125) и примыкает к результатам Берлинга (Beurling A., Acta Math., 1940, 72, 1—13). Доказательство основано на ряде лемм. Приводим одну из них: Пусть D — область, определяемая условиями $0 < \rho < R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 < \frac{\pi}{2}$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $u(P)$ гармонична в D, исключая вершину O, и пусть

$$\iiint\limits_{D} |\operatorname{grad} u(P)|^2\, dv < \infty, \quad \iiint\limits_{D} |\operatorname{grad} u(P)| \frac{dv}{\rho^2} < \infty.$$

Тогда равномерно существует $\lim\limits_{\rho \to 0} u(\rho, \theta, \varphi) \neq \infty$ и $\int_0^R |\operatorname{grad} u|\, d\rho \leqslant K$.

Н. С. Ландкоф

2206. О решениях некоторых переопределенных систем дифференциальных уравнений с частными производными. Хартман, Винтнер (On the solutions of certain overdetermined systems of partial differential equations. Hartman Philip, Wintner Aurel), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 168—174 (англ.)

Изучается степень гладкости решения системы

$$f^j(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \qquad (1)$$

по известной гладкости функций f^j.

Пусть функции $f^j(x, y, u, v, w_1, w_2, w_3, w_4) \in C^n$ ($n > 1$). В некоторой области восьмимерного пространства $(x, y, u, v, w_1, w_2, w_3, w_4)$, а в некоторой области (x, y) функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ принадлежат классу C^2 и удовлетворяют системе (1), причем имеет место неравенство

$$[u_x][v_y] - [u_y][v_x] \neq 0. \qquad (2)$$

Тогда $u(x, y)$ и $v(x, y)$ принадлежат классу C^{n+1}. Здесь употреблены обозначения: (i, k, l, m) — одна из четырех перестановок из (1, 2, 3, 4), удовлетворяющая условию $k < l < m$, $[w_i]$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ есть функциональный определитель

$$\frac{\partial(f^1, f^2, f^3)}{\partial(w_k, w_l, w_m)}.$$

Дифференцированием (1) по x и y получается система шести уравнений с шестью неизвестными u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, v_{xx}, v_{xy}, v_{yy}, определитель которой отличен от нуля в силу (2). Из полученных выражений вторых производных непосредственно следует утверждение теоремы.

Авторы утверждают, что теорема допускает обобщение для большего числа неизвестных и аргументов.

Ставится вопрос о замене соответствующих условий теоремы условиями: $n \geqslant 1$ и $u, v \in C^1$. Задача в последней постановке решается для частных случаев системы (1). Например, доказана теорема:

Пусть для фиксированного $n \geqslant 1$ функции a, b, c, d, e, g — из класса C^n в области (x, y, u, v) и $F(x, y, u, v, w_1, w_2, w_3, w_4)$ — из класса C^n в области $(x, y, u, v, w_1, w_2, w_3, w_4)$. Пусть $u(x, y)$, $v(x, y)$ — из класса C^1 и удовлетворяют гиперболической системе

$$au_x + bv_x = e, \quad cu_y + dv_y = g,$$

уравнению $F(x, y, u, v, u_x, u_y, v_x, v_y) = 0$ и неравенству

$$(ad - bc)(aF_3 - bF_1)(cF_4 - dF_2) \neq 0,$$

где $F_i = \partial F / \partial w_i$. Тогда $u(x, y)$ и $v(x, y)$ принадлежат классу C^{n+1}.

Как отмечают авторы, проблема связана с задачами локальной дифференциальной геометрии, например, с вопросом о связи гладкости кривизны (или же соответствующих форм) поверхности с гладкостью самой поверхности.

З. И. Халилов

2207. Сингулярные решения и задача Коши для обобщенных уравнений Трикоми. Вейнштейн (The singular solutions and the Cauchy problem for generalized Tricomi equations. Weinstein Alexander), Communs Pure and Appl. Math., 1954, **7**, № 1, 105—116 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$\sigma^{2n+1}\sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} + u_{\sigma\sigma} = 0,$$

которое при $\sigma > 0$ преобразованием $y = 2(2n+3)^{-1}\times$ $\times \sigma^{(2n+3)/2}$ приводится к виду

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} + u_{yy} + \frac{k}{y} u_y = 0,$$

где $k = \dfrac{2n+1}{2n+3}$, а при $\sigma < 0$ преобразованием $t = 2(2n+3)^{-1}(-\sigma)^{(2n+3)/2}$ — к виду

$$\sum_{i=1}^{m} u_{x_i x_i} - u_{tt} - \frac{k}{t} u_t = 0.$$

Автор находит фундаментальное решение этого уравнения при $y \geqslant 0$ в виде

$$u_b^{(k)} = C_k \int_0^{\pi} \frac{\sin^{k-1}\alpha d\alpha}{\left(\sum\limits_{i=1}^{m} x_i^2 + b^2 + y^2 - 2by\cos\alpha\right)^{(k+m-1)/2}},$$

где $C_k^{-1} = 2^{k-1}\Gamma^2\left(\dfrac{k}{2}\right)\Gamma^{-1}(k)$,

$$u_b^{(k)}(x, 0) = \left(\sum_{i=1}^{m} x_i^2 + b^2\right)^{-(k+m-1)/2}, \quad u_{by}^{(k)}(x, 0) = 0.$$

Это решение может быть продолжено в гиперболическое полупространство. Для этого решается задача Коши с начальными данными

$$u^{(k)}(x, 0) = f(x), \quad u_t^{(k)}(x, 0) = 0.$$

При $k > m-1$ решение находится в виде

$$u^{(k)}(x, t) = A_{km} \int_{\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \leqslant 1} f(x_1 + a_1 t, \ldots) \times$$

$$\times \left(1 - \sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2\right)^{(k-m-1)/2} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m,$$

где $\omega_l = 2\pi^{l/2}\Gamma\left(\dfrac{l}{2}\right)$, $A_{km} = \omega_{k+m-1}/\omega_k$.

При $k < m$, $k \neq -1, -2, \ldots$ берется наименьшее целое n такое, что $k + 2n \geqslant m - 1$. Тогда

$$u^{(k)}(x, t) = t^{1-k}\left(\frac{\partial}{t\partial t}\right)^n (t^{k+2n-1} u^{(k+2n)}),$$

$$u^{(k+2n)}(x, 0) = \frac{f(x)}{(k+1)(k+3)\ldots(k+2n-1)},$$

$$u^{(k+2n)}(x, 0) = 0.$$

Решение будет единственным только при $k > 0$.

Ф. И. Франкль

2208. Разложение по собственным функциям для общих самосопряженных сингулярных эллиптических дифференциальных операторов в частных производных. I. Аналитическое обоснование. II. Связь с пространством Гильберта; параболические уравнения на незамкнутых многообразиях. Браудер (The eigenfunction expansion theorem for the general self-adjoint singular elliptic partial differential operator. I. The Analytical foundation, II. The Hilbert space argument; parabolic equations on open manifolds. Browder Felix E.), Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1954, **40**, № 6, 454—459, 459—463 (англ.)

Изучается спектральное разложение для формально самосопряженной эллиптической системы дифференциальных операторов

$$K(u) \equiv \sum_{j=1}^{r} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_s=1 \\ 0 \leqslant s \leqslant t}}^{n} a_{k_1,\ldots,k_s;\, i,\, j}(x) \frac{\partial^s u_j}{\partial x_{k_1} \ldots \partial x_{k_s}}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, r) \qquad (1)$$

с достаточное число раз дифференцируемыми коэффициентами. Система (1) задается в конечной или бесконечной области, причем поведение коэффициентов вблизи границы области никаким ограничениям не подвергается.

Для краткости ограничимся описанием основных результатов.

I. Обозначим через K_1 самосопряженное расширение оператора K.

Тогда для $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$ и $m > n/2t$ (t — порядок K) $(K_1 - \zeta I)^{-m}$ есть ограниченный интегральный оператор типа Карлемана.

II. Разложение единицы оператора K_1 есть оператор Карлемана с непрерывным ядром.

III. Изучено разложение оператора K_1 по простым спектрам. При помощи теоремы Повзнера — Маутнера о дифференцируемости ядра разложения единицы автору удается избежать интегралов Хеллингера и представить разложение единицы через некоторый набор решений системы уравнений и обычные интегралы Стилтьеса.

Перечисленные результаты применяются для построения решения смешанной задачи для параболической системы

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (-1)^{m+1} K u,$$

где K — эллиптическая система порядка $2m$.

Б. М. Левитан

2209. Методы исследования волновых процессов в средах, содержащих сферические или цилиндрические границы раздела. Петрашень Г. И., Уч. зап. ЛГУ, 1953, № 170, сер. матем. наук, вып. 27, 96—220

Исследуются некоторые предельные задачи интегрирования волнового уравнения как в плоском случае, когда решение зависит от двух полярных координат r и φ, так и в случае осевой симметрии, когда волновое поле характеризуется двумя сферическими координатами r и θ.

В основном решается задача о распространении в неограниченном круглом цилиндре азимутальных волн, возбужденных внутренним источником, причем

решение волнового уравнения ищется в форме трех слагаемых

$$u(\rho, \varphi, \tau) = \frac{1}{2\pi} u_0(\rho, \tau) + u_0(\rho, \varphi, \tau) + u_1(\rho, \varphi, \tau)$$

$$(\rho = r/R, \quad \tau = t/cR),$$

где

$$u_1(\rho, \varphi, \tau) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=n_0}^{\infty} u_n(\rho, \tau) \cos n\varphi,$$

$$u_n(\rho, \tau) =$$

$$= A_n \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{H_n^{(2)'}(-inz)\, J_n(-in\rho_1 z)\, J_n(-in\rho z)}{J_n'(-inz)} e^{n\tau z}\, dz$$

Наибольший интерес с физической точки зрения представляет изучение слагаемого $u_1(\rho, \varphi, \tau)$, характеризующего быстро изменяющуюся часть волнового поля.

В свою очередь функция $u_1(\rho, \varphi, \tau)$ представляется в виде двух сумм, из которых первая оказывается малой и ею можно пренебречь, а из второй выделяется главная часть, описывающая как качественную, так и количественную картины распространения волн в рассматриваемой среде.

В дальнейшем автор подробно останавливается на изучении волн, отраженных от поверхностей раздела. *Н. С. Кошлякое*

2210. О преобразовании линеаризированного уравнения нестационарного сверхзвукового потока. Майлс (On the transformation of the linearized equation of unsteady supersonic flow. Miles John W.), Quart. Appl. Math., 1954, 12, № 1, 1—12 (англ.)

Для исследования колеблющегося тела, движущегося поступательно с постоянной сверхзвуковой скоростью, автор преобразует волновое уравнение

$$\varphi_{XX} + \varphi_{YY} + \varphi_{ZZ} = \varphi_{TT}$$

при помощи некоторого модифицированного преобразования Лоренца

$$\begin{pmatrix} x \\ \tau \end{pmatrix} = (M^2 - 1)^{-1/2} \begin{pmatrix} 1 & M \\ M & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ T \end{pmatrix}, \quad y = Y, \quad z = Z$$

к виду

$$\varphi_{xx} - \varphi_{yy} - \varphi_{zz} = \varphi_{\tau\tau},$$

где τ — условное время, начальный момент которого меняется в зависимости от продольной координаты x, причем начальная точка последней связана с движущимся телом. При таком выборе времени основное уравнение сохраняет вид классического волнового уравнения, что облегчает его решение. Приводится ряд частных решений, построенных при помощи преобразования Лапласа и разделения переменных.

Из советских работ автор ссылается только на одну работу Хаскинда и Фальковича (Прикл. матем. и механика, 1947, 11, № 3, 371—376). Не упоминаются работы Е. А. Красильщиковой, впервые решившей задачу обтекания колеблющегося крыла конечного размаха, движущегося со сверхзвуковой скоростью. Условие схода струй с задней кромки крыла, найденное С. А. Чаплыгиным, неправильно приписывается Кутта. *Ф. И. Франкль*

2211. Положительные температуры в полубесконечном стержне. Уиддер (Positive temperatures on a semi-infinite rod. Widder D. V.), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 3, 510—525 (англ.)

Изучаются дважды непрерывно дифференцируемые неотрицательные решения $u(x, t)$ уравнения $\partial u / \partial t = \partial^2 u / \partial x^2$ в области Π: $0 < x < \infty$, $0 < t < c$. Основные результаты следующие. Если $u \to 0$ при приближении к любой точке левого и нижнего краев области Π, то $u \equiv 0$. Чтобы $u \to 0$ при приближении к любой точке левого края области Π (кроме его концов), необходимо и достаточно существование представления

$$u(x, t) = pxk(x, t) + t + \int_{+0}^{\infty} [k(x - y, t) - k(x + y, t)]\, d\alpha(y),$$

где $k(x, t) \equiv e^{-x^2/4t} / \sqrt{4\pi t}$, $p \geqslant 0$, $\alpha(y)$ не убывает на интервале $0 < y < \infty$, приведенный интеграл сходится при $(x, t) \in \Pi$ и

$$\int_{+0}^{1} y\, d\alpha(y) < \infty.$$

Чтобы $u \to 0$ при приближении к любой внутренней точке нижнего края области Π, необходимо и достаточно существование представления

$$u(x, t) = -2 \int_0^t k_x'(x, t - y)\, d\beta(y),$$

где $\beta(y)$ не убывает на участке $0 \leqslant y < c$. Класс всех функций $u(x, t)$ совпадает с классом функций, представимых формулой

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} [k(x - y, t) - k(x + y, t)]\, d\alpha(y) - 2 \int_0^t k_x'(x, t - y)\, d\beta(y),$$

где несобственный интеграл сходится при $0 < x < \infty$, $0 < t < c$.

Доказательства основаны на рассмотрении предельных значений интегралов типа приведенных выше и применении теоремы о максимуме решений в конечных областях. Основным промежуточным результатом является неравенство

$$\int_0^{\infty} [k(x - y, t) - k(x + y, t)]\, u(y, \delta)\, dy \leqslant u(x, t + \delta)$$

$$(0 < \delta < c, \ 0 < t < c - \delta),$$

которое переходит в равенство для всех функций $u(x, t)$, обращающихся в пределе в нуль во всех внутренних точках левого края области Π. *А. Д. Мышкис*

2212. Гидродинамические силы, действующие на обусловленные линиями источников препятствия. Вильямс (Hydrodynamic forces on obstacles due to line sources. Williams J.), Quart. J. Math., 1954, 5, № 17, 11—27 (англ.)

Сила $\mathbf{F}$ и момент $\mathbf{G}_0$ относительно начала координат, которые испытывает препятствие, помещенное в установившийся и безвихревой поток жидкости при отсутствии массовых сил, имеют вид:

$$\mathbf{F}/\rho = \sum_{i=1}^{k} \int_{(S_i)} \boldsymbol{\Gamma}\, dS + \int_{(E)} \boldsymbol{\Gamma}\, dS,$$

$$\mathbf{G}_0/\rho = \sum_{i=1}^{k} \int_{(S_i)} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Gamma}\, dS + \int_{(E)} \mathbf{r} \times \boldsymbol{\Gamma}\, dS,$$

где $\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{q}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{q}) - \frac{1}{2}\mathbf{n}q^2$, S_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ — k замкнутых поверхностей, окружающих k особенностей течения, таких, как источники, диполи и т. д.; E — граница жидкости, $\mathbf{n}$ — единичная нормаль в некоторой точке S_i или E, направленная внутрь жидкости (Milne-Thomson L. M., Theoretical hydrodynamics, 2nd ed., London, 1949, 418).

Если скорость жидкости $\mathbf{q}$ при $r \to \infty$ ведет себя как $O(r^{-2})$, то влияние границы E на $\mathbf{F}$ и $\mathbf{G}_0$ стремится к нулю. Автор рассматривает случай, когда скорость

$$\mathbf{q} = \mathbf{u} + \mathbf{v}r^{-2} + \mathbf{w}r^{-3} + O(r^{-4}),$$

где $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — величины порядка не больше $O(1)$ при $r \to \infty$, и устанавливает, что влияние границы E на $\mathbf{F}$ будет конечным, когда $\mathbf{u}$ — постоянный вектор; влияние E равно нулю при $r \to \infty$, если и $\mathbf{v}$ — постоянный вектор. Влияние E на $\mathbf{G}_0$ конечно, когда $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — постоянные векторы. Если $\mathbf{u}$ — постоянный вектор, а $\mathbf{v} = A\mathbf{r}^\circ$, где A — постоянный скаляр, то влияние это также ограничено.

Определяется потенциал скорости и выводятся выражения для силы и момента в случае, когда в потоке находятся источники переменной плотности, распределенные вдоль прямолинейного отрезка. Рассматривается сочетание распределенных на таком отрезке источников с точечным источником на конце отрезка. Полученные формулы используются для решения задачи об обтекании n дирижаблеобразных форм, расположенных на прямой, параллельной равномерному поступательному потоку. Эти формы получаются сочетанием равномерно распределенных на прямолинейном отрезке длины $b_k - a_k$ стоков линейной обильности $m_k/(b_k - a_k)$ с изолированным источником обильности m_k в конце отрезка, который находится со стороны набегающего потока. Определяется сила воздействия потока на дирижаблеобразную форму, помещенную в равномерный поток позади сферы, обтекаемой этим потоком. *А. К. Никитин*

2213. Об одном частном точном решении уравнений неустановившегося одномерного движения газа. Кочина Н. Н., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 3, 407

Для нелинейных уравнений неустановившегося движения совершенного газа в одномерном случае (плоские, цилиндрические, и сферические волны) указаны точные решения, зависящие от двух произвольных функций. Вопрос о возможных примерах использования полученных решений не затрагивается. *Д. М. Волков*

2214. Приложения обобщенных аналитических функций к теории безмоментных оболочек. Усманов Н. К., Изв. АН ЛатвССР, 1954, № 5, 115—132

При помощи теории обобщенных аналитических функций (термин автора) граничная задача безмоментной теории оболочек сводится к сингулярному интегральному уравнению.

Однако при более общих условиях как теория обобщенных аналитических функций, так и ее приложение к безмоментной теории оболочек даны в работе И. Н. Векуа (Матем. сб., 1952, 31, № 2, 217—314).

В статье имеется много опечаток. *С. А. Терсенов*

2215 К. Ядерные функции и эллиптические дифференциальные уравнения в математической физике. Бергман, Шиффер (Kernel functions and elliptic differential equations in mathematical physics. Bergman Stefan, Schiffer M. Stanford University, California, New York N. Y., Academic press Inc. Publishers, 1953, 432 s.). (англ.)

Книга состоит из двух частей. В части А выводятся некоторые конкретные уравнения математической физики и исследуются их простейшие свойства, часть В посвящена более обстоятельному изучению основных краевых задач для уравнения $\Delta u = q(x, y)\, u$.

Часть А содержит главы: I. Теория распространения тепла; II. Гидродинамика; III. Электро- и магнетостатика; IV. Упругость.

В главе I выводится уравнение распространения тепла в среде, вообще говоря, неоднородной. Исследуется стационарный режим, описываемый уравнением вида $\operatorname{div}(\varkappa \operatorname{grad} T) = 0$ или, если произвести подходящую замену неизвестной функции, $\Delta u = au$. Формулируются краевые условия, соответствующие задачам Дирихле, Неймана и смешанной; доказывается теорема единственности для этих задач. Для уравнения Лапласа вводятся функции Грина и Неймана и аналогичная функция для смешанной задачи — авторы называют ее функцией Робена. Доказывается, что функции Грина и Робена неотрицательны. Формулируется минимальное свойство интеграла Дирихле и кратко излагается история принципа Дирихле. В весьма общих чертах рассматривается более общее уравнение

$$\Delta T = p(P)\, T, \qquad p > 0.$$

В главе II для идеальной баротропной жидкости выводятся уравнения движения и уравнение неразрывности. Для безвихревого установившегося движения выводится интеграл Бернулли. Доказывается, что в несжимаемой жидкости потенциал скоростей удовлетворяет уравнению Лапласа. Формулируется задача обтекания. Устанавливается ряд свойств функций Грина и Неймана для оператора Лапласа. Те же вопросы более подробно исследуются в части В для уравнения $\Delta u = qu$.

Рассматриваются плоское и осесимметричное движение несжимаемой жидкости, а также плоское дозвуковое течение сжимаемой жидкости. Частные примеры такого движения удается получить, привлекая аппарат так называемых l-моногенных функций.

В главе III выводятся общие уравнения электростатического и магнетостатического полей и рассматриваются некоторые простейшие задачи электростатики. В этой же главе для уравнения Лапласа вводится так называемая ядерная функция, равная

разности между функцией Неймана и функцией Грина данной области. Устанавливается ряд свойств ядерной функции, которые обстоятельнее изучаются в части B для более общего уравнения.

В главе IV вводятся тензоры деформаций и напряжений, выводятся уравнения теории упругости, формулируются основные краевые задачи и вводятся решающие эти задачи фундаментальные тензоры, названные авторами тензорами Грина, Неймана и Робена соответственно. Разность тензоров Неймана и Грина авторы называют ядерным тензором; для него устанавливаются предложения, аналогичные тем, которые были доказаны для ядерной функции в главе III.

Коротко излагается теория тонких пластин и подробнее — плоская задача теории упругости.

Часть B посвящена исследованию уравнения

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = q(x, y)\, u, \qquad (1)$$

где функция $q(x, y)$ предполагается непрерывно дифференцируемой в ограниченной замкнутой области $\bar{D} = D + C$ (контур C области D предполагается аналитическим). Только в конце отмечается, что методы и результаты части B распространяются на уравнения, которые могут быть рассмотрены как вариационные уравнения для задачи экстремума положительно определенного квадратичного функционала от функции двух переменных. С уравнением (1) сопоставляется «интеграл Дирихле»

$$E\{u\} = \iint\limits_D (u_x^2 + u_y^2 + qu^2)\, dx\, dy,$$

а также соответствующий билинейный интеграл

$$E\{u, v\} = \iint\limits_D (u_x v_x + u_y v_y + quv)\, dx\, dy.$$

В главе I части B при помощи интеграла Дирихле обычным образом вводится метрика. Указывается, что в этой метрике функции, обращающиеся в нуль на C, ортогональны к решениям уравнения (1). Отмечаются также свойство максимума неотрицательных решений этого уравнения и некоторые вытекающие отсюда следствия.

Рассматривается краевая задача для уравнения $\Delta u - qu = f(P)$ при краевом условии вида $u|_C = 0$ или $\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_C = 0$; существование решения этих задач доказывается методом интегральных уравнений в предположении, что для данной области известна функция Грина или Неймана для уравнения Лапласа. Аналогично решается смешанная задача. Для уравнения (1) вводятся функции Грина $G(P, Q)$, Неймана $N(P, Q)$ и Робена $R_\lambda(P, Q)$. Авторы называют эти функции фундаментальными решениями уравнения (1).

Вводится класс Ω функций, дважды непрерывно дифференцируемых в $\bar{D}$, а также его подклассы: Ω_0 — функций, исчезающих на C, и Σ — решений уравнения (1). Устанавливаются формулы

$$v(Q) = E\{N(P, Q), v(P)\}, \quad v \in \Omega,$$
$$v(Q) = E\{G(P, Q), v(P)\}, \quad v \in \Omega_0,$$
$$0 = E\{G(P, Q), v(P)\}, \quad v \in \Sigma.$$

В главе II вводится ядерная функция $K(P, Q) = N(P, Q) - G(P, Q)$. Устанавливаются формулы

$$u(Q) = -\int\limits_C K(P, Q)\, \frac{\partial u}{\partial \nu_p}\, ds_P = -\int\limits_C u\, \frac{\partial K(P, Q)}{\partial \nu_P}\, ds_P,$$
$$u \in \sum, \quad Q \in D,$$

показывающие, что знание ядерной функции позволяет решить как первую, так и вторую задачу для данной области. Через ядерную функцию можно просто выразить функции Грина и Неймана для данной области, если известно сингулярное решение уравнения (1). Справедлива оценка $u^2(Q) \leqslant E\{u\} \times K(Q, Q)$, из которой вытекает экстремальное свойство ядерной функции: среди всех решений уравнения (1), обращающихся в единицу в точке Q, функция $K(P, Q)/K(Q, Q)$ имеет наименьший интеграл Дирихле, равный $1/K(Q, Q)$. Указанное свойство позволяет найти ядерную функцию из решения некоторой простой вариационной задачи. Ядерная функция может быть также представлена в виде

$$K(P, Q) = \sum_{i=1}^{\infty} u_i(P)\, u_i(Q),$$

где $\{u_i\}$ — ортонормированная полная в классе Σ, в смысле метрики, определяемой интегралом Дирихле, система решений уравнения (1); написанный ряд сходится равномерно, когда одна из точек P или Q закреплена, а другая пробегает какую угодно внутреннюю подобласть. Дается прием, позволяющий построить полную в Σ систему решений, если известно сингулярное решение уравнения (1), дважды непрерывно дифференцируемое при $P \neq Q$ в области, более широкой, чем D. Другой способ построения такой полной системы, основанный на параметрическом представлении общего интеграла уравнения (1), развит для случая аналитической $q(P)$.

Отметим еще теорему, согласно которой сумма компенсирующих частей функций Грина и Неймана есть функция, непрерывно дифференцируемая по координатам обеих точек в $\bar{D}$.

В главе III рассмотрены соотношения между фундаментальными решениями для различных областей и выводятся формулы для вариаций этих функций при малом изменении области. В главе IV первая краевая задача для уравнения (1) решается методом ортогонального проектирования. В главе V исследуется зависимость решения от характера краевых условий и от коэффициента q. Показывается, что функция Робена убывает с возрастанием λ, так что, в частности, $N \geqslant R_\lambda \geqslant G$, и что при неизменных краевых значениях решение уравнения (1) убывает с возрастанием q. Наконец, в главе VI указывается на возможность введения иного вида метрик, а также на возможность обобщения основных результатов на более общие эллиптические уравнения.

Дается библиография и подробные указатели — именной и предметный. Список символов и обозначений, помещенный в конце, облегчает пользование книгой. *С. Г. Михлин*

2216 К. Первый коллоквиум об уравнениях в частных производных, Лувен (Premier colloque sur les équations aux dérivées partielles, tenu à Louvain du 17 au 19 décembre 1953, 128 pp.,

Thone Georges (édit.) à Liège, I 400 fr.), Bibliogr. France, 1954, **143**, № 21, ч. 3, 2088 (библ.)

2217 Д. О смешанной задаче для линейных гиперболических систем дифференциальных уравнений с частными производными на плоскости. Аболиня В. Э. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Латв. ун-т, Рига, 1954

2218 Д. Применение метода сопряженных градиентов и их модификаций для решения линейной краевой задачи. Хохштрассер (Die Anwendung der Methode der konjugierten Gradienten und ihre Modifikationen auf die Lösung linearer Randwertprobleme. Hochstrasser Urs. Diss. N 2328 math. ETH, Zürich, 1954, 46 S.), Schweiz. Buch., 1954, **B54**, № 5, 217 (библ.)

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

2219. Исследование периодических режимов и их устойчивости для простейшей распределенной системы релейного регулирования температуры. Неймарк Ю. И., Кубланов И. М., Автоматика и телемеханика, 1953, **14**, № 1, 34—43

Решается поставленная А. А. Андроновым задача об определении периодических колебаний температуры печи в случае, когда температура поддерживается релейным регулятором типа «включено — выключено». Процесс регулирования описывается уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}$$

при граничных условиях

$$-\left.\frac{\partial T}{\partial \xi}\right|_{\xi=0} = f(T(\bar{\xi}, \tau)), \quad T|_{\xi=1} = 0,$$

где f — неоднозначная функция, принимающая только значения 0 и 1 и имеющая прямоугольную петлю.

Задача сводится к изучению преобразования:

$$a_k^1 = -2b_k^{-1} + (2b_k^{-1} + a_k \exp(-b_k\tau_1)) \times \exp(-b_k\tau_2), \quad k = 1, 2, \ldots, \qquad (1)$$

где $b_k = (2k+1)^2\pi^2/4$. Здесь точка с координатами a_k $\left(k=1, 2, \ldots, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty\right)$ определяет состояние системы в момент одного из включений регулятора, точка с координатами a_k^1 — в момент следующего включения, а τ_1 и τ_2 ($\tau_1 + \tau_2$ — время между двумя следующими друг за другом включениями) находятся как наименьшие положительные корни уравнений:

$$1 - \bar{\xi} + \sum_k a_k \exp(-b_k\tau_1) \cos\sqrt{b_k}\,\bar{\xi} = T_{\text{выкл}},$$

$$\sum_k \left(2b_k^{-1} + a_k \exp(-b_k\tau_1)\right) \exp(-b_k\tau_2) \times \cos\sqrt{b_k}\,\bar{\xi} = T_{\text{вкл}}.$$

Периодические решения определяются условиями $a_k = a_k^1$ $(k=1, 2, \ldots)$. Исследование локальной устойчивости найденных периодических решений сводится тогда к исследованию устойчивости соответствующей неподвижной точки преобразования (1). Результаты подсчетов сведены в графики. *М. А. Айзерман*

2220. Использование обобщенных кривых Вышнеградского для построения кривой переходного процесса автоматического регулирования. Мееров М. В., Автоматика и телемеханика, 1954, **15**, № 3, 193—199

Использование кривых D-разбиения для оценки качества и построения кривых переходного процесса в системах автоматического регулирования целесообразно, так как эти кривые строятся для исследования устойчивости и нет надобности повторно их строить для исследования качества и построения процесса; кроме того, с помощью D-разбиения выясняется совокупность значений некоторых параметров, при которых система остается устойчивой.

Реферируемая работа продолжает работы автора (Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1950, № 12, 1784—1794; Автоматика и телемеханика, 1951, **12**, № 6, 453—464), где оценка качества производится по кривой D-разбиения по одному комплексному параметру. В основу положены свойства вещественных частотных характеристик, вытекающие из вещественной формы интеграла Фурье

$$U(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{R(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega,$$

где $U(t)$ — регулируемая величина и $R(\omega)$ — вещественная частотная характеристика замкнутой системы регулирования.

По передаточной функции замкнутой системы обычными способами находится выражение вещественной частотной характеристики и затем с помощью данного автором искусственного преобразования вещественная частотная характеристика выражается через текущие координаты кривой D-разбиения по двум вещественным параметрам, вспомогательной кривой и через значения параметров, выбираемых в устойчивой области. По построенной вещественной частотной характеристике известными в литературе способами строится кривая переходного процесса. В ряде простых случаев (кривая Вышнеградского и др.) оценка некоторых показателей качества (определение области положительности вещественной частотной характеристики) определяется непосредственно из кривой D-разбиения по двум параметрам. Основные результаты и метод исследования иллюстрируются примером. *Г. М. Уланов*

2221. К приближенному исследованию условий устойчивости периодических режимов в системах автоматического регулирования. Смирнова И. М., Автоматика и телемеханика, 1954, **15**, № 2, 97—106

Рассматривается уравнение

$$D(p)\,x = K\left(f(x) + A\sin\omega t\right),$$

где $D(p)$ — полином по $p = \frac{d}{dt}$ с действительными коэффициентами, $f(x)$ — заданная нечетная функция, A, ω и K — положительные числа. Методом гармонического баланса задача о приближенном определении периодических решений вида $x = C\sin(\omega t - \gamma)$

сводится к нахождению значений C и γ, удовлетворяющих равенству

$$Y(i\omega) = R(C) + \frac{A}{C}e^{i\gamma}, \qquad (1)$$

где $Y(i\omega) = D(i\omega)/K$, $R(C) = g(C) + ib(C)$, а $Cg(C)$ и $Cb(C)$ — коэффициенты при первой гармонике в разложении функции $f(C\sin z)$ в ряд Фурье. Решение уравнения (1) находится графическим построением годографов $Y(i\omega)$, $R(C)$ и окружности $\frac{A}{C}e^{i\gamma}$ (см. работу референта, Инженерный сб., 1952, №13, 151—160). Ставится задача: определить аналогичным построением также и условия локальной устойчивости найденных периодических решений. Полагая, что рассматриваемая система близка к линейной, имеющей порождающее периодическое решение, автор указывает два неравенства, решающие в этом случае вопрос об устойчивости. Описываются простые построения, позволяющие проверить, выполняются ли эти неравенства, и отделить на резонансном графике точки, соответствующие устойчивым и неустойчивым периодическим решениям. Показывается, что точки резонансного графика, имеющие вертикальные касательные, принадлежат границе, разделяющей устойчивые и неустойчивые периодические режимы (для случая, когда функция $f(x)$ однозначна и поэтому $b(C) = 0$, этот факт был установлен ранее Крыловым и Боголюбовым; в реферируемой заметке он распространяется на случай $b(C) \neq 0$).

Примечание референта. Автор ошибочно полагает, что результаты работы верны не только для случая $K = \text{const} > 0$, но и для случая, когда $K = K(p)$ — полином по p (см. Смирнова, Автоматика и телемеханика, 1955, **16**, № 1, 112). *М. А. Айзерман*

2222. **О приложении функций комплексного переменного к динамике материальной точки.** Аржаных И. С., Докл. АН СССР, 1954, 96, № 1, 21—24

Рассматривается система уравнений движения

$$\ddot{x} = U_x + 2\omega\dot{y}, \quad \ddot{y} = U_y - 2\omega\dot{x}, \qquad (1)$$

где ω — функция времени (угловая скорость подвижной системы координат).

Утверждается, что система уравнений (1) всегда допускает интеграл $S\dot{x} + T\dot{y} = K$.

Полагая S и T равными соответственно действительной и мнимой частям некоторой функции комплексного переменного и привлекая также интеграл энергии, автор получает для определения K нелинейное уравнение в частных производных первого порядка.

Утверждается, что уравнения (1) при $\omega = 0$ имеют интеграл вида

$$P\dot{x}^2 + 2Q\dot{x}\dot{y} + R\dot{y}^2 = K.$$

Доказательство приводится весьма сжатое, причем неясно, как из нелинейного относительно функций P и R уравнения в частных производных первого порядка (P_x и R_y входят в квадратах) можно найти $P + R$. Далее доказывается, что при некоторых ограничениях на U уравнения (1) имеют интеграл при $K = \text{const}$. По поводу доказательства этой теоремы можно высказать те же замечания, что и относительно предыдущей, даже в большей мере. Имеющиеся в конце обобщения изложены неясно. При рассмотрении единственного примера, автор упускает из вида наличие интеграла площадей при движении под действием центральной силы, когда $\omega = 0$. При помощи этого интеграла, интеграла энергии и найденного автором нового квадратичного интеграла получается семейство кривых, отличное от найденного автором. *В. В. Добронравов*

2223. **Об уравнениях вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.** Аржаных И. С., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 3, 403—406

Два преобразования уравнений движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. При помощи первого преобразования задача сводится к интегрированию системы

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{d\sigma^2} = \operatorname{grad} U - f\left[\operatorname{rot}\mathbf{G}, \frac{d\mathbf{r}}{d\sigma}\right] \qquad (1)$$

при наличии уравнения связи

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1, \qquad (2)$$

являющегося уравнением эллипсоида инерции в закрепленной точке. Здесь $\mathbf{r} = i\xi + j\eta + k\zeta$, U и проекции вектора $\mathbf{G}$ — некоторые функции ξ, η, ζ, A, B, C — главные моменты инерции тела в закрепленной точке, f — постоянный момент количества движения относительно вертикали. Уравнения (1), (2) дают возможность интерпретировать движение тела как движение точки по эллипсоиду инерции.

При втором преобразовании задача приводится к интегрированию системы

$$x'' = V_x - f\Omega y', \quad y'' = V_y + f\Omega x', \qquad (3)$$

где V и Ω — некоторые функции x и y. Зависимость V и Ω от x и y дается в неявной форме при помощи двух вспомогательных параметров. Уравнения (3) позволяют интерпретировать движение тела как движение наэлектризованной частицы под действием плоского электрического и перпендикулярного магнитного полей. Из справедливости уравнений (3) автор делает основной вывод о наличии в задаче нового линейного интеграла, отличного от классических. *И. Г. Малкин*

2224. **Излучение горизонтального диполя в полубесконечной диссипативной среде.** Лянь (Radiation from a horizontal dipole in a semi-infinite dissipative medium. Lien Roy Harold), J. Appl. Phys., 1953, 24, № 1, 1—4 (англ.)

В выражение потенциала поля входят интегралы

$$U = 2\int_0^\infty \frac{J_0(\xi\rho)\,e^{-m(z+h)}}{l+m}\,\xi\,d\xi,$$

$$\Gamma = 2n^2\int_0^\infty \frac{J_0(\xi\rho)\,e^{-m(z+h)}}{n^2l+m}\,\xi\,d\xi,$$

где h — расстояние диполя от границы $z = 0$ среды, ρ, φ и z — цилиндрические координаты, $l^2 = \xi^2 - k^2$, $m^2 = \xi^2 - n^2k^2$, n — комплексный показатель преломления ($n^2 = \varkappa - i\sigma'/\omega\varepsilon$), $k^2 = \mu\varepsilon\omega^2$, $\varkappa$, σ, ε, μ — константы. Для малых частот ω, т. е. для $|n|^2 \gg 1$, выводит-

ся асимптотическая формула для интеграла V:

$$V \approx -2k\frac{\partial}{\partial v}\left\{I_0\left(\frac{in}{2}\left[(u^2+v^2)^{1/2}-v\right]\right)\times\right.$$
$$\left.\times K_0\left(\frac{in}{2}\left[(u^2+v^2)^{1/2}+v\right]\right)\right\},$$

где $u = k\rho$ и $v = k(z+h)$, а также следующее выражение для интеграла U:

$$U \approx -\frac{1}{n^2}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}+\frac{1}{u}\frac{\partial V}{\partial u}+2\frac{\partial^2 G_2}{\partial v^2}\right),$$

где

$$G_2 = \exp\left(-ink\sqrt{\rho^2+(z+h)^2}\right)/\sqrt{\rho^2+(z+h)^2}.$$

В. И. Левин

2225. Единственность решения основной граничной задачи вязкой несжимаемой жидкости. **Долидзе Д. Е.**, Докл. АН СССР, 1954, **96**, № 3, 437—440

Рассмотрен вопрос о единственности решения для системы нелинейных уравнений

$$\nu\Delta\mathbf{v}-\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=\mathbf{v}\,\mathrm{grad}\,\mathbf{v}+\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p-\mathbf{F},\qquad \mathrm{div}\,\mathbf{v}=0,$$

где ν — кинематический коэффициент вязкости, ρ — плотность, $\mathbf{F}$ — массовая сила, $\mathbf{v}$ — скорость, p — давление. В начальный момент $\mathbf{v}$ задана внутри области, при $t>0$ $\mathbf{v}$ на границе принимает заданные непрерывные значения. При доказательстве теоремы единственности используются формулы Гаусса — Остроградского и Грина, а также уравнение неразрывности. Единственность решения задачи рассмотрена также и для внешней области при дополнительных условиях

$$\lim_{r\to\infty} r^{1+\alpha}\mathbf{v}=0,\quad \lim_{r\to\infty} r^{1+\alpha}\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial x_i}=0,\quad \lim_{r\to\infty} rp=0,$$

где $\alpha \geqslant 1/2$. Для двумерного случая $\alpha \geqslant -1/2$.

В. Д. Чугунов

2226. Доказательства единственности для некоторых гиперболических дифференциальных уравнений теоретической физики. **Плебаньский** (Eindeutigkeitsbeweise für einige hyperbolische Differentialgleichungen der theoretischen Physik. Plebański J.), Acta phys. polon., 1953, **12**, № 3—4, 230—237 (нем., резюме русс.)

В развитие идей Рубиновича (Rubinowicz A., Phys. Z., 1926, 27, 707) доказана следующая элементарная лемма. Пусть в четырехмерном пространстве $x=(x^0, x^1, x^2, x^3)$ даны вещественные гладкие функции $g_{00}(x)$ и $g_{kl}(x)\equiv g_{lk}(x)$ $(k, l = 1, 2, 3)$, причем $\sum g_{kl}(x)\,\xi_k\xi_l > 0$ $(\sum\xi_k^2>0)$. Пусть далее дана криволинейная усеченная пирамида Ω, на основаниях R и R' которой

$$g_{00}\cos^2(n, x^0)-\sum g_{kl}\cos(n, x^k)\cos(n, x^l)>0,$$

а на боковой поверхности T это выражение равно нулю, причем для внешней нормали n $\cos(n, x^0)$ положителен на R' и T и отрицателен на R. Пусть, наконец, на Ω дано гладкое векторное поле $I(x)=(I^0, I^1, I^2, I^3)$, для которого

$$I^0 \geqslant 0,\ g_{00}I^{0^2}-\sum g_{kl}I^kI^l \geqslant 0,$$

$$Q_1 \equiv \frac{\partial(g_{00}I^0)}{\partial x^0}-\sum\frac{\partial(g_{kl}I^l)}{\partial x^k}\leqslant 0,$$

причем $I=0$ на R. Тогда $I=0$ и на R'. Если $Q_1\equiv 0$, то можно изменить положение пирамиды Ω, считая, что $\cos(n, x^0)<0$ на R' и T и >0 на R. Эта лемма применяется для доказательства единственности решения задачи Коши (в соответствующих областях зависимости) для систем уравнений Максвелла, Прока́ и Дирака, причем неравенство $Q_1<0$ во всех случаях имеет истолкование как дифференциальный закон сохранения. Надо отметить, однако, что в примерах Q_1 строится как обычная четырехмерная дивергенция поля I и потому изложение здесь должно быть изменено (что, правда, не влияет на окончательные результаты). Опечатка: на стр. 232, строчка 16 сверху, должно быть $\geqslant$ вместо $\gg$.

А. Д. Мышкис

2227. Об уравнении продольных движений каната (упругой нити) переменной длины. **Ишлинский А. Ю.**, Докл. АН СССР, 1954, 95, № 5, 939—941

Для уравнения движения груза на упругом канате переменной длины строится решение в предположении, что движение элементов каната не имеет волнового характера.

Приближенное решение имеет вид:

$$u(x, t) = x\varphi(t),$$

где x — расстояние элемента каната от груза в предположении, что канат не растянут. Для функции $\varphi(t)$ приемом, позволяющим минимизировать погрешность от замены точного значения $u(x, t)$ на приближенное, получено обыкновенное линейное дифференциальное уравнение второго порядка.

Указывается, что аналогично могут быть получены приближенные уравнения для канатов переменной длины с учетом несовершенной упругости.

А. С. Петров

2228. Построение решения с подвижной сингулярностью для уравнения $\Delta u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$. **Фер** (Construction d'une solution à singularité mobile de l'équation $\Delta u-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$. Fer Francis), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 5, 567—569 (франц.)

Пусть по произвольной траектории C движется точка A со скоростью v $(0<\alpha\leqslant v\leqslant\tilde{\omega}<c)$. Рассмотрим потенциал вида

$$u(M, t)=\int_{-\infty}^{\tau}\omega(\theta)\,\frac{\mu[c(t-\theta)-r]}{r}\,d\theta,$$

где $\omega(\theta)$ и $\mu(\xi)$ — регулярные комплексные функции, причем $\omega(\theta)$ ограничена, а

$$\mu(\xi)=\begin{cases}\neq 0, & 0<\xi<\chi,\\ =0, & 0>\xi,\ \chi<\xi,\end{cases}$$

$$\mu(0)=\frac{\partial\mu}{\partial\xi}(0)=0,$$

χ — некоторый фиксированный параметр; величина τ — корень уравнения $c(t-\tau)-r(\tau)=0$, а $r=AM$.

Построенный таким образом потенциал u обладает следующими свойствами:

1. $\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$.

2. u регулярно для всех моментов времени t во всем пространстве, за исключением дуги Г траектории, определенной интервалом $[t-\chi/c, t]$ величины θ. Это дуга движется со скоростью v по траектории C.

3. Сингулярностью обладает амплитуда потенциала и ее первые производные. Фаза и ее производные непрерывны.

4. Поведение u на бесконечности отлично от поведения обычных потенциалов.

Автор отмечает, что его работа предпринята в связи с исследованиями Луи де-Бройля сингулярных решений волновых уравнений квантовой механики (Broglie L. de, C. r. Acad. sci., 1951, 233, 641, 1013; 1952, 234, 265; 1953, 236, 1453).

Д. П. Костомаров

2229. Течения через сопла и соответствующие проблемы для цилиндрических и сферических волн. Чжэнь Ю-вай (Flows through nozzles and related problems of cylindrical and spherical waves. Chen Yu Why), Communs Pure and Appl. Math., 1953, 6, № 2, 179—229 (англ.)

Исследуются сверхзвуковые течения в соплах кругового сечения. В частности, рассматривается случай, когда задано распределение скоростей вдоль оси, а продольная производная скорости имеет разрыв в точке оси сопла $x=0$. Допускаются степенные особенности производной вида

$$v'(x) = O(|x|^{\gamma-1}), \qquad u'(x) = O(|x|^{\gamma'-1})$$

соответственно при $x<0$, $x>0$. Рассматриваются подробно случаи $\gamma > \frac{1}{2}$; $\gamma' > \frac{1}{2}$ и $\gamma > \frac{1}{2}$; $\gamma' = \frac{1}{2}$.

В обоих случаях автор исследует вопрос о существовании решения задачи Коши (существовании непрерывного сверхзвукового течения) в окрестности особой точки. В первом случае оказывается, что решение существует всегда, и на характеристиках, проходящих через особую точку, производные скорости остаются непрерывными. Во втором случае образуется логарифмическая особенность на характеристике, идущей вверх по течению ($x<0$), непрерывное решение существует только при расширении потока вдоль оси. В исследовании используется теория гипергеометрических функций; доказательства существования проводятся методом итерации.

Аналогичными методами автор исследует вопросы распространения цилиндрических и сферических волн.

Ф. И. Франкль

2230. Метод Бергмана линейных интегральных операторов в теории течения сжимаемой жидкости. Б. Сверхзвуковое и смешанное течение. Кшивоблоцкий (Bergman's linear integral operator method in the theory of compressible fluid flow. B. Super- and transonic flow. Krzywoblocki M. Z. E.), Österr. Ingr-Arch., 1953, 7, № 4, 336—370 (англ.; резюме нем., франц.)

В статье строятся некоторые классы решений уравнений плоского сверхзвукового и смешанного течений сжимаемой жидкости. Эти решения имеют вид некоторых интегральных операторов над произвольными функциями, удовлетворяющими только известным условиям гладкости. Для сверхзвукового течения один из таких операторов может быть построен при помощи функции Римана и имеет вид

$$\psi^*(\xi,\eta) = AR(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dg(x)}{dx} R(x,\eta_0;\xi_0,\eta_0)\,dx + \int_{\eta_0}^{\eta} \frac{dh(y)}{dy} R(\xi_0,y;\xi_0,\eta_0)\,dy.$$

Здесь ψ^* — функция тока; уравнение, которому она удовлетворяет, приведено к виду

$$\psi^*_{\xi\eta} + F_1(\xi+\eta)\psi^* = 0;$$

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n R^{(n)}, \qquad R^{(0)} = 1,$$

$$R^{(n)}(\xi,\eta;\xi_0,\eta_0) = \int_{\xi_0}^{\xi}\int_{\eta_0}^{\eta} F_1(x+y) R^{(n-1)}(x,y;\xi_0,\eta_0)\,dx\,dy.$$

g и h — произвольные непрерывные функции, удовлетворяющие условию $g(\xi_0) = h(\eta_0) = A$.

Другой тип решений дается формулами

$$v^{(1)}(\xi,\eta) = f(\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} E^{(n)}(\xi+\eta) f^{(n)}(\xi),$$

$$v^{(2)}(\xi,\eta) = g(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} E^{(n)}(\xi+\eta) g^{(n)}(\eta),$$

где f и g — произвольные непрерывно дифференцируемые функции,

$$f^{(n)}(\xi) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\xi} (\xi-\xi_1)^{n-1} f(\xi_1)\,d\xi_1;$$

$$g^{(n)}(\eta) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^{\eta} (\eta-\eta_1)^{n-1} g(\eta_1)\,d\eta_1,$$

а функции $E^{(n)}$ определяются соотношениями

$$E^{(1)}(\tau) = -\int_0^{\tau} F_1(\tau_1)\,d\tau_1,$$

$$E^{(n+1)}(\tau) = -\int_0^{\tau} [E^{(n)}_{\tau\tau}(\tau_1) + F_1(\tau_1) E^{(n)}(\tau_1)]\,d\tau_1,$$

$F_1(\tau)$ — заданная функция.

Ряды для $v^{(1)}$ и $v^{(2)}$ сходятся равномерно в некоторой области и допускают почленное дифференцирование, если только имеет место оценка вида

$$\left|\frac{d^n F_1(\tau)}{d\tau^n}\right| \leqslant \frac{2(n+1)!\,\mu\tau_{00}^2}{|\tau_{00}-\tau|^{n+2}},$$

где n — любое число, μ и τ_{00} — некоторые постоянные.

В случае смешанного течения функция тока строится в виде ряда Фурье по одной из переменных; коэффициенты этого ряда выражаются через

гипергеометрическую функцию другой переменной. Для уравнений смешанного течения автор строит решения также и в виде некоторых интегральных операторов. Соответствующим преобразованием независимых переменных уравнение течения приводится к виду

$$\psi_{HH} + l(H)\,\varphi_{\theta\theta} = 0, \qquad (1)$$

где $l(H) > 0$ в дозвуковой области и $l(H) < 0$ в сверхзвуковой области. Вблизи критической скорости автор рекомендует заменять $l(H)$ выражением $-CH$, $C = \text{const}$, что приводит к упрощенному уравнению

$$\psi_{HH} - CH\,\psi_{\theta\theta} = 0. \qquad (2)$$

Решение уравнения (1), пригодное в дозвуковой области, автор указывает в виде мнимой части выражения

$$p(g) = R(Z', \bar{Z}')\,[g(Z') + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n}\,\frac{\Gamma(2n+1)}{\Gamma(n+1)} \times$$
$$\times\, p^{(n)}(Z', \bar{Z}')\, g^{[n]}(Z')].$$

Здесь комплексная переменная Z' определенным образом связана с переменными H и θ, функция $R(Z', \bar{Z}')$ также вполне определенным способом связана с коэффициентами уравнения течения,

$$g(Z') = \int_{-1}^{+1} f\left[\frac{1}{2}\,Z'(1-t^2)\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

где f — подходящим образом выбранная функция. Значение $g^{[n]}$ определено противоречащими друг другу формулами

$$g^{[n]}(Z') = \int_0^{Z'}\int_0^{Z_1}\cdots\int_0^{Z_{n-1}} g(Z_n)\,dZ_n\,dZ_{n-1}\cdots dZ_1 =$$
$$= \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\int_0^{Z'} (Z'-\xi)^{n-1}\,g(\xi)\,d\xi;$$

значение символа $p^{(n)}(Z', \bar{Z}')$ не пояснено. Не указано также, как следует выбирать функцию f.

Для упрощенного уравнения (2) решением, годным вблизи критической линии $H = 0$, является мнимая часть выражения

$$p_2(f) = \int_{-1}^{+1} E^+(\lambda, \theta, t)\,f\left[\frac{1}{2}\,Z(1-t^2)\right]\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},$$

где E^+ — некоторое вполне определенное ядро, $Z = \lambda + i\theta$ и λ зависит от H. Какова должна быть функция f, не указано. Аналогичные решения строятся и для точного уравнения (1).

С. Г. Михлин

2231. Явления переноса при капиллярном обмене. Ландал (Transient phenomena in capillary exchange. Landahl H. D.), Bull. Math. Biophys., 1954, **16**, № 1, 55—58 (англ.)

Рассматривается вопрос о диффузии через стенки капилляра при учете взаимодействия с окружающей средой. Пусть F и G — концентрации переносимого вещества внутри капилляра и в окружающей среде соответственно. В предположении двумерности задачи и круговой симметрии функции F и G удовлетворяют системе уравнений

$$\frac{\partial G}{\partial t} = bAF - AG - aG, \qquad \frac{\partial F}{\partial t} = -bBF + BG - V\frac{\partial F}{\partial x},$$

при начальных условиях $F(x, 0) = G(x, 0) = 0$ и краевом условии $F(0, t) = C(t)$.

Здесь $A = 2\pi rk'/v_s$, $b = h/k$, $B = 2k/r$; h и k' — коэффициенты проницаемости стенок для прямого и обратного потоков; r — радиус капилляра: v_s — объем единицы длины капилляра; a — коэффициент поглощения вещества; V — скорость движения вещества вдоль капилляра. Поставленная задача решается при помощи преобразования Лапласа. Для $F(x, t)$ получено выражение

$$F(x,t) = C\left(t - \frac{x}{V}\right)e^{-\alpha/a} +$$
$$+ e^{-\alpha/a}\int_0^{t-\frac{x}{V}} C\left(t - \frac{x}{V} - \tau\right)\exp\left(-(A+a)\,\tau\right) \times$$
$$\times\,\frac{\partial I_0\left(2\sqrt{\alpha\tau}\right)}{\partial\tau}\,d\tau,$$

где $\alpha = ba\,Bx/V$, I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Ю. Н. Днестровский

2232. Тепловое излучение в процессах теплопроводности. Генцель (Der Anteil der Wärmestrahlung bei Wärmeleitungsvorgängen. Genzel L.), Z. Physik, 1953, **135**, № 2, 177—195 (англ.)

Рассматривается одномерная задача теплопроводности в однородных изотропных средах. Определяется температурное распределение и поток энергии для ряда частных случаев. Поток энергии через элемент поверхности в плоскости z имеет вид

$$\Phi_s = \Phi_{ss} + \Phi_{SR} + \Phi_L,$$

где Φ_{ss} — поток энергии, излучаемой слоем среды между плоскостями ζ, $\zeta + d\zeta$, Φ_{SR} — поток энергии, излучаемой граничными стенками слоя, Φ_L — поток энергии через элемент поверхности в плоскости z, обусловленный «чистой» теплопроводностью.

$$\Phi_{ss} = 2\pi n^2\int_{\lambda=0}^{\infty}\int_{\zeta=0}^{z} E_s(\lambda, T(\zeta))K_1(k(\lambda)\cdot|z-\zeta|)k(\lambda)\,d\zeta d\lambda -$$
$$- 2\pi n^2\int_{\lambda=0}^{\infty}\int_{\zeta=z}^{h} E_s(\lambda,\ T(\zeta))\cdot K_1(k(\lambda)(\zeta - z))\,k(\lambda)\,d\zeta d\lambda,$$

$$\Phi_{SR} = 2\pi n^2\int_{\lambda=0}^{\infty}[-E_s(\lambda,\ T_0)\,K_2(k(\lambda)z) +$$
$$+ E_s(\lambda,\ T_h)\,K_2(k(\lambda)(h-z))]\,d\lambda,$$

$$\Phi_L = -\varkappa_L\frac{dT}{dz},$$

где n — коэффициент преломления среды, $k(\lambda)$ — коэффициент поглощения среды, λ — длина волны, $\varkappa_L$ — коэффициент «чистой» теплопроводности, T_0 и T_h — температуры граничных стенок,

$$\frac{d}{dx}K_1(x) = E_1(-x), \qquad \frac{d}{dx}K_2(x) = K_1(x).$$

Условие стац ионарности дает

$$\frac{d\Phi_s}{dz} = 0. \qquad (1)$$

Это уравнение определяет искомое температурное распределение. Автор предполагает, что граничные стенки абсолютно черные, функция $k(\lambda)$ имеет вид $k(\lambda) = k_\nu$ для $\lambda_{\nu-1} < \lambda < \lambda_\nu$,

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} \frac{1}{k_\nu} \int_{\lambda_{\nu-1}}^{\lambda_\nu} \frac{d}{d\zeta} E_s(\lambda, T(\zeta))\, d\lambda = \text{const}$$

(справедливость последнего не вызывает возражения лишь в случае «серого» поглощения).

В этом приближении (1) решается для следующих частных случаев.

1. $\Phi_{SR} = 0$; это условие реализуется при $k(\lambda) z \gg 1$, $k(\lambda) |z - h| \gg 1$.

$\Phi_L = 0$; это условие приближенно реализуется лишь при высоких температурах. Температурное распределение, поток энергии и коэффициент теплопроводности имеют вид:

$$T^4(\zeta) = a + b\zeta; \quad \Phi_s = -\frac{4\sigma n^2}{3k} \frac{dT^4(\zeta)}{d\zeta}; \quad \varkappa = \frac{16\sigma n^2 T^3}{3k}.$$

2. $\Phi_{SR} = 0$, $\Phi_L \neq 0$; автор дает выражение для потока энергии и коэффициента теплопроводности

$$\Phi_s \approx -\left(\varkappa_L + \frac{16\sigma n^2}{3k} T^3\right) \frac{dT}{dz}; \quad \varkappa = \varkappa_L + \frac{16\sigma n^2}{3k}.$$

3. $\Phi_{SR} \neq 0$, $\Phi_L = 0$; выражение для температурного распределения и потока энергии в приближении $k = \text{const}$ имеет вид:

$$T^4(\zeta) = \frac{T_0^4(2 + 3kh) + 2T_h^4}{4 + 3kh} - \frac{3(T_0^4 - T_h^4)}{4 + 3kh} k\zeta,$$

$$\Phi_s = \frac{4\sigma n^2 (T_0^4 - T_h^4)}{4 + 3kh}$$

4. Для случая $\Phi_L \neq 0$ и $\Phi_{SR} \neq 0$ в статье приводятся лишь качественные результаты, заимствованные из работы Вальтера, Дёрра и Эллера (РЖМат, 1954, 1680). *С. Г. Зайцев*

2233. Об одном предельном переходе в теории устойчивости упругих прямоугольных пластин. **Ишлинский А. Ю.**, Докл. АН СССР, 1954, 95, № 3, 477—479

Рассматривается задача об устойчивости прямоугольной пластинки, два противоположных края которой шарнирно оперты, а два других свободны. К шарнирно опертым краям пластинки приложены равномерно распределенные сжимающие усилия интенсивности p. Для нахождения критического значения этих усилий ищется минимальное значение параметра p, при котором дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{p}{D}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

с граничными условиями

$$w(0, y) = w(l, y) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, y)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(l, y)}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 w(x, \pm b)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w(x, \pm b)}{\partial x^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^3 w(x, \pm b)}{\partial y^3} + (2 - \nu)\frac{\partial^3 w(x, \pm b)}{\partial x^2 \partial y} = 0$$

имеет нетривиальное решение.

Представив выражение для критического усилия в виде

$$p_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 D}{l^2} \mu\left(\frac{\pi b}{l}\right),$$

где l — расстояние между шарнирными краями, b — расстояние между свободными краями, D — цилиндрическая жесткость пластинки, автор получает трансцендентное уравнение для определения μ. Показывается, что μ для любых значений b/l оказывается меньше единицы. Фактическое отыскание предельного значения параметра μ при $b/l \to \infty$ приводит к решению алгебраического уравнения

$$\mu^2 + 2(1 - \nu)(1 - 3\nu)\mu - (3 + \nu)(1 - \nu^2) = 0. \qquad (1)$$

В частности, если $\nu = 0{,}3$, то $\mu = 0{,}9962$.

С другой стороны, рассматривая бесконечно длинную пластинку и предполагая, что форма потери устойчивости есть цилиндр, автор получает

$$p^*_{\text{кр}} = \pi^2 D / l^2$$

Объяснение кажущемуся противоречию, по мнению автора, «следует искать в том факте, что принцип Сен-Венана в некотором смысле не приложим к телам типа пластинок, вытянутых в одном какомлибо направлении».

Примечание референта. В исследуемой системе наиболее слабыми частями являются свободные концы, наличие которых как раз и определяет наименьшее значение критической нагрузки. Поэтому в качестве предельного случая нужно рассматривать не бесконечную полосу, где оба конца уводятся в бесконечность и, следовательно, исключаются из рассмотрения, а полубесконечную, когда в бесконечность уводится только один из концов полосы. Для этой последней, как нетрудно убедиться, уравнение для определения μ совпадает с (1). Таким образом, вывод автора о неприменимости принципа Сен-Венана к длинным узким пластинкам представляется сомнительным.

В. И. Моссаковский

2234. Об одной системе дифференциальных уравнений с частными производными, описывающей перемещения тонкой цилиндрической оболочки. **Шварц** (Su un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali concernente gli spostamenti nelle volte cilindriche sottili. Schwarz Maria Josepha de), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 82—88 (итал.)

Задача из теории оболочек сводится к решению системы уравнений

$$\begin{aligned}
&\rho(1 - \nu) E_1(S) \equiv \rho(1 - \nu)\Delta u + \\
&\quad + \rho(1 + \nu)(u_x + v_y)_x + 2\nu w_x = 0, \\
&\rho(1 - \nu) E_2(S) \equiv \rho(1 - \nu)\Delta v + \\
&\quad + \rho(1 + \nu)(u_x + v_y)_y + 2w_y = 0, \qquad (1) \\
&\rho(1 - \nu) E_3(S) \equiv 2\nu u_x + 2v_y + 2k\rho\Delta\Delta w + 2\rho^{-1} w = 0
\end{aligned}$$

($S=(u, v, w)$; индексами обозначены частные производные) в области $D: 0\leqslant x\leqslant x_1,\ 0\leqslant y\leqslant y_1$ при краевом условии вида $L(S)=l$, где $L(S)$ — четырехмерный вектор, элементами которого являются линейные однородные дифференциальные операторы (с постоянными коэффициентами) второго порядка специального вида, заданные на границе Γ области D. Система (1) приводится к уравнению

$$\Delta^4 F+\frac{(1-\nu^2)}{\rho^2 k}\frac{\partial^4 F}{\partial x^4}=0,$$

которое имеет набор решений вида $e^{r_m x}\sin\frac{my}{\rho}$ и $e^{r_m x}\cos\frac{my}{\rho}$, где r_m — корень уравнения

$$(r_m^2-m^2\rho^{-2})^4+(1-\nu^2)\rho^{-2}k^{-1}r_m^4=0\quad(m=0,1,\ldots);$$

этим решениям отвечает последовательность $S_1, S, \ldots$ частных решений системы (1). Из формулы Грина

$$\iint\limits_D (S,\ E(S))\,dxdy=-\int\limits_\Gamma (L(S),\ R(S))\,d\Gamma+$$
$$+\iint\limits_D \{(k+1)(\rho^{-1}w+\nu u_x+v_y)^2+$$
$$+2(1+\nu)u_x^2+(u_y+v_x)^2+2k(1-\nu)^{-1}(\Delta w)^2\}\,dxdy$$

($R(S)$ — вектор вида, аналогичного $L(S)$) вытекает единственность решения поставленной краевой задачи. Приближенное решение задачи ищется в виде $S=\sum_{n=1}^{h}c_n S_n$ из условия минимизации интеграла $\int\limits_\Gamma\left(l-\sum_{n=1}^{h}c_n L(S_n)\right)^2 d\Gamma$. *А. Д. Мышкис*

2235. Об изгибе консольных прямоугольных плит. I. Койтер, Алблас (On the bending of cantilever rectangular plates. I. Koiter W. T., Alblas J. B.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **B57**, № 2, 250—258 (англ.)

Статья является первой среди серии работ авторов, посвященных изгибу консольных прямоугольных плит. Имея в виду дальнейшие приложения к изгибу консольной плиты, авторы рассматривают тонкую упругую плиту, имеющую форму квадранта $x\geqslant 0,\ y\geqslant 0$, кромка $x=0$ которого заделана, а край $y=0$ свободен от сил и подвержен действию распределенного изгибающего момента $m_{y_0}(x)$. Применяя к бигармоническому уравнению для прогиба $w(x, y)$ последовательно синус-преобразование Фурье по переменной x и косинус-преобразование по y и удовлетворяя краевым условиям (отсутствие прогиба при $x=0$ и отсутствие усилий при $y=0$), авторы выражают величину $W_{\lambda,\mu}=\int_0^\infty\cos\mu y\,dy\int_0^\infty w\sin\lambda x\,dx$ через две неизвестные функции: опорный момент на краю $x=0$ и угол наклона $\partial w/\partial y$ на линии $y=0$. Удовлетворение оставшимся двум граничным условиям приводит к системе двух интегральных уравнений относительно этих функций, которая оказывается разрешимой при помощи интегрального преобразования Меллина. Последнее обстоятельство связано, очевидно, с тем, что рассматриваемую задачу можно решить преобразованием Меллина по переменной $r=\sqrt{x^2+y^2}$, что и отмечается в работе.

Следует заметить, что в списке литературы отсутствует работа референта (Докл. АН СССР, 1952, **34**, № 3, 463), в которой, повидимому, впервые интегральное преобразование Меллина применялось к задачам изгиба клиновидных плит.

Я. С. Уфлянд

2236. Об изгибе консольных прямоугольных плит. II. Койтер и Алблас (On the bending of cantilever rectangular plates. II. Koiter W. T., Alblas J. B.), Proc. Koninkl. nederl. acad. wetensch., 1954, **B57**, № 2, 259—269 (англ.)

Часть I см. реф. 2235.

Комплексные интегралы мелливновского типа, через которые выражается решение задачи об изгибе прямоугольной клиновидной плиты, преобразуются при помощи теоремы о вычетах, причем полюса расположены в точках $z=z_n$, где z_n — корни известного уравнения

$$\cos z\pi=2\frac{1-\nu}{3+\nu}z^2-\frac{5+2\nu+\nu^2}{(3+\nu)(1-\nu)},$$

ν — коэффициент Пуассона.

Приводятся значения первых 7 комплексных корней (при $\nu=1/4$), а также дается асимптотическая формула для z_n при больших n. Расчеты производились для того случая, когда постоянный изгибающий момент приложен к участку $0<x<1$ свободного края. Приведены графики для изгибающего момента и перерезывающей силы на закрепленной кромке, а также для крутящего момента вдоль свободного края. *Я. С. Уфлянд*

2237. К расчету косоугольных плит. Кретнер (Beitrag zur Berechnung schiefwinkliger Platten. Krettner J.), Ingr-Arch., 1954, **22**, № 1, 47—54 (нем.)

Рассматривается изгиб равномерно нагруженной упругой тонкой плиты, имеющей форму параллелограмма.

Автор считает, что решение удобнее искать в косоугольных координатах x, y, выражающихся через прямоугольные $\bar{x}, \bar{y}$, соотношениями $x=\bar{x}-\bar{y}\operatorname{tg}\varphi$, $y=\bar{y}/\cos\varphi$. Уравнение для прогиба w принимает при этом вид

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+2\left(1+2s_0^2\right)\frac{\partial^4 w}{\partial y^2\,\partial x^2}-$$
$$-4s_0\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^3\,\partial y}+\frac{\partial^4 w}{\partial x\,\partial y^3}\right)=\frac{c_0^4}{D}p_0,\qquad(1)$$

$c_0=\cos\varphi$, $s_0=\sin\varphi$, p_0 — внешняя нагрузка, D — цилиндрическая жесткость.

Строится частное решение w_0 уравнения (1). Оно представляется в виде произведения двух тригонометрических рядов, каждый из которых зависит только от одной из переменных x или y, причем ряды суммируются по x. Окончательно w_0 представляется в виде ряда по функциям $\cos\frac{n\pi y}{b}$ и $\sin\frac{n\pi y}{b}$ (b — длина одной из сторон плиты), коэффициенты которого содержат линейные комбинации произведений $\operatorname{ch}\frac{n\pi c_0 x}{b}\cos\frac{n\pi s_0 x}{b}$, $\operatorname{ch}\frac{n\pi c_0 x}{b}\sin\frac{n\pi s_0 x}{b}$, $\operatorname{sh}\frac{n\pi c_0 x}{b}\cos\frac{n\pi s_0 x}{b}$, $\operatorname{sh}\frac{n\pi c_0 x}{b}\sin\frac{n\pi s_0 x}{b}$, умножен-

ные на линейные функции x. Добавляя к w_0 решение w_1 однородного уравнения (1), построенное аналогичным способом и содержащее неопределенные коэффициенты, автор предполагает в следующих работах дать метод приближенного расчета изгибающих моментов для различных случаев внешней нагрузки и граничных условий. *Я. С. Уфлянд*

2238. О магнитном поле стационарных токов, находящихся в полостях или каналах внутри железа, проницаемость которого может считаться бесконечно большой. Гринберг Г. А., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 5, 839—842

Для линейного тока I, помещенного в цилиндрическом канале с магнитной проницаемостью μ_1 внутри неограниченной среды с бесконечно большой проницаемостью μ_2, полное магнитное поле $\mathbf{H}$ может быть представлено в виде суммы $\mathbf{H} = \mathbf{H}^0 + \mathbf{H}_m$, где $\mathbf{H}^0 = \operatorname{rot} \mathbf{A}^0$ — первичное поле, создаваемое током I в пустоте, $\mathbf{H}_m = -\operatorname{grad} \varphi$ — поле «магнитных масс», выделившихся на поверхности канала. Поля внутри канала обозначаются индексом (1), в среде с бесконечно большой проницаемостью — индексом (2). Граничное условие на поверхности раздела сред:

$$\overline{H}_n^{(2)} = H_n^{(0)} - \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial n} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial A^0}{\partial s} - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial s} = \frac{\partial u^{(2)}}{\partial s} = 0,$$

где $\psi^{(2)}$ — сопряженная с $\varphi^{(2)}$ функция.

Функция $u^{(2)}$ является постоянной на поверхности раздела и удовлетворяет уравнению Лапласа, так как вне канала $\Delta A^0 = 0$ и $\Delta \psi^{(2)} = 0$. Из равенства нулю суммы выделившихся магнитных масс следует, что

$$\int\limits_{(S)} \frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial u}\, ds = \int\limits_{(S)} \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial s}\, ds = 0,$$

т. е. $\varphi^{(2)}$ на бесконечности имеет вид

$$\varphi^{(2)} = \frac{\alpha \cos \vartheta + \beta \sin \vartheta}{r} + O\left(\frac{1}{r^2}\right),$$

а следовательно, и $\psi^{(2)}$ на бесконечности стремится к нулю. Это условие вместе с условием $\psi^{(2)} = A^0 - u^{(2)} = \text{const}$ на поверхности канала единственным образом определяет функцию $\psi^{(2)}$, а вместе с ней и $\varphi^{(2)}$. Но $(A^0)_{r \to \infty} = -\frac{2I}{c} \ln r + O\left(\frac{1}{r}\right)$, поэтому $(u^{(2)})_{r \to \infty} = -\frac{2I}{c} \ln r + O\left(\frac{1}{r}\right)$. Отсюда следует, что $u^{(2)}$ совпадает с потенциалом бесконечного проводящего цилиндра с зарядом $\frac{I}{c}$ на единицу длины. Для нахождения $\varphi^{(1)}$ остается решить внутреннюю краевую задачу, причем в качестве граничного условия используется непрерывность функции φ на границе раздела. Автор получает ряд следствий из построенного решения. В частности, касательная составляющая H_t магнитного поля на поверхности канала не зависит от местонахождения тока внутри канала и обращается в нуль только в случае, когда полная сумма токов внутри контура равна нулю. *Ю. Н. Днестровский*

2239 Д. Теория парного соударения в обобщенной задаче трех тел. Склянский А. Л., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ин-т матем. АН УССР, Киев, 1954

2240 Д. Обтекание произвольного профиля ограниченным потоком жидкости. Федоров Е. Я. Автореф. дисс. канд. техн. н., Казанск. ин-т, Казань, 1953

См. также: 2055, 2057, 2058 К, 2073, 2151, 2167, 2183 Д, 2321.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

2241. Вещественность собственных значений некоторых интегральных уравнений. Хельстен (The reality of the eigenvalues of certain integral equations. Hellsten Ulf), Arkiv mat., 1954, **3**, № 1, 79—87 (англ.)

Изучаются собственные значения интегрального уравнения типа Фредгольма

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy,$$

где ядро $K(x, y)$ равно нулю во всех точках квадрата $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$, расположенных выше некоторой кривой $y = f(x)$, и имеет вид $K(x, y) = P(x)\, Q(y)$ во всех точках, лежащих ниже этой кривой в рассматриваемом квадрате.

Предполагаются выполненными следующие условия: 1) $f(x)$ не убывает, 2) $\lim\limits_{t \to +0} f(x - t) > x$, за исключением, быть может, точек $x = 0$ и $x = 1$, 3) $P(x)\, Q(x)$ интегрируема в $0 \leqslant x \leqslant 1$.

С помощью своих предыдущих результатов (Acta Math., 1947, **79**, № 1—2, 105—152), в случае, если $P(x)\, Q(x) \geqslant 0$ почти всюду в $0 \leqslant x \leqslant 1$, автор доказывает вещественность и положительность собственных значений рассматриваемого интегрального уравнения. *Д. Ф. Харазов*

2242. Точное решение интегральных уравнений некоторых проблем колебаний. Радок, Хеллер (Die exakte Lösung der Integralgleichungen gewisser Schwingungsprobleme. Radok Jens Rainer Maria, Heller Alfred), Z. angew. Math. und Phys., 1954, **5**, № 1, 50—66 (нем.)

Ставится задача о собственных значениях интегрального уравнения

$$z(x) - \omega^2 \int_0^1 K(x, s)\, z(s)\, ds = 0, \qquad (1)$$

ядро которого симметрично и в промежутке $0 \leqslant x \leqslant s$ представляет собой полином $K(x, s) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} s + \ldots + a_{n-1} x s^{n-1} + a_n s^n$.

Авторы ищут приближенное решение уравнения (1) в виде

$$z(x) = \sum_{j=0}^{k} \sum_{l=0}^{n} A_{lj} x^{j(n+1)+l}. \qquad (2)$$

Такая форма решения позволяет после подстановки в (1) и сравнения коэффициентов просто выразить величины A_{lj} $(j > 0)$ через $A_{l,0}$. Для величин $A_{l,0}$ получается линейная система, условие разрешимости которой приводит к приближенному уравнению частот. При увеличении точности аппроксимации (числа k) не требуется вычислять заново предыдущие коэффициенты.

Изложенный прием поясняется на примере собственных колебаний балки и клина при определенных условиях закрепления. Показывается, что при $k \to \infty$ приближенные уравнения частот в этих примерах переходят в точные, а выражения (2) приводят к истинным собственным функциям.

М. Ш. Бирман

2243. О связи между решениями интегральных уравнений Фредгольма 2-го рода, отличающихся областью интегрирования. Биберман Л. М., Тр. Моск. энерг. ин-та, 1953, № 13, 97—102

Устанавливается связь между резольвентами линейных интегральных уравнений

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\, \varphi(s)\, ds = f(x), \qquad (1)$$

ядра которых совпадают, а области интегрирования различны.

Решение уравнения (1) определяется формулой $\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(s)\, \Gamma(x,s) ds$, где $\Gamma(x,s)$ — резольвента уравнения.

Показано, что если $\Gamma_{ii}(x_i, s_i)$ — резольвента i-го подинтервала (интервал интегрирования (a, b) разбит на n подинтервалов), то она связана с резольвентой для всего интервала интегрирования $\Gamma(x_i, s_i)$ соотношением

$$\Gamma(x_i, s_i) = \Gamma_{ii}(x_i, s_i) + \theta(x_i, s_i), \qquad (2)$$

где

$$\theta(x_i, s_i) = F_1(x_i, s_i) + \lambda \int_i F_1(s_i, t_i)\, \Gamma_{ii}(t_i, x_i)\, dt_i, \qquad (3)$$

$$F_1(x_i, s_i) = \lambda \sum_{j \neq i} \int_j \Gamma(s_i, t_j)\, K(t_j, s_i)\, dt_j.$$

Таким образом, $\theta(x_i, s_i)$ есть решение интегрального уравнения, заданного на подинтервале при частном виде правой части.

Аналогично, если $\Gamma_{ki}(x_i, s_k) = K(x_i, s_k) + \lambda \int_i K(t_i, s_k)\, \Gamma_{ii}(x_i, t_i)\, dt_i$, то $\Gamma(x_i, s_k) = \Gamma_{ki}(x_i, s_k) + \theta(x_i, s_k)$. Формулы (2) и (3) при найденном $\theta(x,s)$ позволяют выразить резольвенту для конечного промежутка через резольвенту для бесконечного промежутка, для которого существует метод определения резольвент, основанный на применении интегральных преобразований (Фурье, Лапласа).

В качестве примера рассмотрено известное уравнение $\varphi(x) - \lambda \int_0^\infty e^{-|x-s|}\, \varphi(s)\, ds = f(x)$. Рассуждения проведены с физической точки зрения (распределение неких источников), те же результаты могут быть получены и математическим путем. Не обращено должного внимания на порядок интегрирования при отсутствии симметричности.

М. К. Номоконов

2244. Две математические заметки, касающиеся решения проблем обратной связи. Панкраз (Dvě matematické poznámky k výzkumu zpětných vazeb. Pankraz Otomar), Slaboproudý obzor, 1954, 15, № 4, 165—170 (чеш.; резюме русс., нем., англ., франц.)

В первой заметке рассмотрены условия существования решения интегрального уравнения Вольтерра первого рода с вырожденным ядром, имеющего, по словам автора, значение для теории передающих систем. Во второй заметке изложен известный факт, что обоснование и интеграция импульсной δ-функции возможны лишь при привлечении теории интегралов Лебега вместо классической теории интегрирования.

Н. А. Бразма

2245. Об одной системе функций. Кузмак Г. Е., Матем. сб., 1954, 35(77), № 3, 461—468

В теории крыла конечного размаха при решении интегро-дифференциального уравнения для циркуляции встречается следующая система функций:

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\gamma_0} f(x),$$

$$\psi_{2m-1}(x) = \frac{1}{\gamma_{2m-1}} \left(1 + \frac{f(x)}{m}\right) \sin mx, \qquad (1)$$

$$\psi_{2m}(x) = \frac{1}{\gamma_{2m}} \left(1 + \frac{f(x)}{m}\right) \cos mx \quad (m = 1,2,\ldots),$$

где γ_n определяются из условия

$$\int_0^{2\pi} \psi_n^2(x)\, dx = 1 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

а $f(x)$ зависит от формы и размера крыла.

При условии $0 < q \leqslant f(x) \leqslant M$ доказывается, что:

1. Функции системы (1) образуют базис в L_2 (т. е. всякая функция $F(x) \in L_2$ единственным образом разлагается в ряд $\Sigma c_n \psi_n(x)$, сходящийся к $F(x)$ в среднем).

2. Для сходимости в среднем ряда $\Sigma c_n \psi_n(x)$ необходимо и достаточно, чтобы $\Sigma c_n^2 < +\infty$.

Полученный результат применяется для решения интегро-дифференциального уравнения

$$f(x)\, \Gamma(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Gamma}{d\xi} \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} d\xi = F(x), \qquad (2)$$

где $F(x) \in L_2$ $(0, 2\pi)$.

Обобщенным решением уравнения (2) называется функция $\Gamma(x)$, являющаяся пределом в среднем для последовательности функций $\Gamma_N(x)$, удовлетворяющих уравнениям

$$f(x)\, \Gamma_N(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\Gamma_N}{d\xi} \operatorname{ctg} \frac{\xi - x}{2} d\xi = F_N(x),$$

где $F_N(x)$ сходятся в среднем к $F(x)$.

Автор доказывает существование непрерывной функции $\Gamma(x)$, являющейся обобщенным решением

уравнения (2). Это решение дается в виде тригонометрического ряда, коэффициенты которого сразу определяются по коэффициентам разложения $F(x)$ в ряд по системе (1). *Н. К. Бари*

2246. Парные интегральные уравнения. Гордон (Dual integral equations. Gordon Alan N.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 3, 360—363 (англ.)

Рассматривается пара интегральных уравнений

$$\int_0^\infty y^\alpha f(y) J_\nu(xy)\, dy = g(x) \quad (0 < x < 1), \qquad (1)$$

$$\int_0^\infty f(y) J_\nu(xy)\, dy = h(x) \quad (x > 1), \qquad (2)$$

где $g(x)$, $h(x)$ — заданные функции, а $f(y)$ — неизвестная функция. Автор пользуется некоторыми классическими интегралами, содержащими функции Бесселя, а также формулами обращения Ганкеля, и показывает, как с помощью этих средств формально получается решение системы (1), (2), ранее найденное довольно сложными путями Титчмаршем (Введение в теорию интегралов Фурье, М.—Л., Гостехиздат, 1948, 423—429) при $\alpha > 0$ и Басбриджем (Busbridge J. W., Proc. London Math. Soc., 1938, (2),44, 115) при $\alpha < 0$. *Н. И. Ахиезер*

2247. О решении интегрального уравнения Чандрасекара и Мюнха. Рамакришнан, Матьюс (On the solution of an integral equation of Chandrasekhar and Münch. Ramakrishnan Alladi, Mathews P. M.), Astrophys. J., 1954, **119**, № 1, 81—90 (англ.)

Интегро-дифференциальное уравнение Чандрасекара и Мюнха имеет вид:

$$\frac{\partial g(u,\varepsilon)}{\partial \varepsilon} = -g(u,\varepsilon) - \frac{\partial g(v,\varepsilon)}{\partial u} + \int_q g\left(\frac{u}{q}\right)\psi(q)\frac{dq}{q};$$

символ $\int_x$ означает интегрирование по области изменения переменной x. Из физических соображений следует, что $u \geqslant 0$, $\int_u g(u,\varepsilon)\, du = 1$, $g(u,0) = \delta(u)$, где δ — дельта-функция Дирака, и $0 \leqslant q \leqslant 1$. Полагая

$$p(s,\varepsilon) = \int_0^\infty g(u,\varepsilon) u^s\, du, \quad q_s = \int_0^1 \psi(q) q^s\, dq,$$

приходим к уравнению

$$\partial p(s,\varepsilon)/\partial\varepsilon = -p(s,\varepsilon) + q_s p(s,\varepsilon) + sp(s-1,\varepsilon) \qquad (1)$$

и начальным условиям

$$p(s,0) = 0 \text{ при } s \neq 0;\ p(0,0) = 1. \qquad (2)$$

Зная $p(s,\varepsilon)$, легко восстановить $g(u,\varepsilon)$. Для целого n

$$p(n,\varepsilon) = n! \sum_{k=0}^{n} \left[e^{(1-q_k)\varepsilon} \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (q_k - q_j) \right]^{-1}, \qquad (3)$$

В некоторых случаях можно преобразовать формулу (3) так, что она сохраняет смысл при замене целого n произвольным комплексным s. При этом иногда оказывается, что полученное для $p(s,\varepsilon)$ выражение удовлетворяет уравнению (1) и начальным условиям (2).

Приведем один из примеров применения такого преобразования. Пусть $\psi(q') = \delta(q' - q)$, так что $q_j = q^j$ и

$$p(n,\varepsilon) = n! \sum_{k=0}^{n} \left[e^{(1-q^k)\varepsilon} \prod_{j=0, j\neq k}^{n} (q^k - q^j) \right]^{-1}.$$

Тождественными преобразованиями это выражение приводится к виду

$$p(n,\varepsilon) = e^{-\varepsilon}\varepsilon^n + n!\, e^{-\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{n+m} \times \times [(n+m)!]^{-1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^m A_k^m q^{(n+m)k},$$

где $(-1)^m A_k^m = \prod_{j=0,\ j\neq k}^{m} (q^k - q^j)^{-1}$. Теперь можно положить

$$p(s,\varepsilon) = e^{-\varepsilon}\varepsilon^s + \Gamma(s+1) e^{-\varepsilon} \sum_{m=1}^{\infty} \varepsilon^{s+m} \times \times [\Gamma(s+m+1)]^{-1} \sum_{k=0}^{m} (-1)^m A_k^m q^{(s+m)k}$$

и это совпадает с решением уравнения (1) при начальных условиях (2). *С. Г. Михлин*

2248. Об одном классе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Адонц М. Т., Докл. АН АзербССР, 1954, **10**, № 3, 167—174 (резюме азерб.)

Результаты Н. Н. Назарова (Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1948, № 4, 59—65, 74—76) переносятся на интегро-дифференциальные уравнения

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) f[y, u(y), \ldots, u^{(n)}(y)]\, dy \qquad (1)$$

(в работах Н. Н. Назарова $n = 1$). Без доказательства формулируется

Теорема 1. Если выполняются условия:

1) функция $f(y, v_1, \ldots, v_{n+1})$ непрерывна по y для $y \in [0,1]$ при $|v_i| < L$ и удовлетворяет условию Липшица по переменным $v_1, \ldots, v_{n+1}$;

2) функция $K(x,y)$ имеет кусочно-непрерывные производные по x до n-го порядка включительно и $|K(x,y)| < B$, $|K'_x(x,y)| < B, \ldots, |K^{(n)}(x,y)| < B$, где B — постоянное, то уравнение (1) имеет единственное решение, если только λ достаточно мало.

Методом Н. Н. Назарова доказывается

Теорема 2. Точка λ_0 не является точкой ветвления решения $u(x,\lambda_0) = u_0(x)$ уравнения (1) если:

1) ядро $K(x,y)$ регулярное;

2) функция $f(y, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1})$ аналитическая относительно аргументов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}$ в окрестности значений $\alpha_1 = u_0(y), \ldots, \alpha_{n+1} = u_0^{(n)}(y)$;

3) значение λ_0 не является собственным для линейного интегро-дифференциального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x,y) \sum_{\nu=0}^{n} A_\nu(y) \varphi^{(\nu)}(y)\, dy$$

где

$$A_k(y) = \partial f[y, u_0(y), \ldots, u_0^{(n)}(y)]/\partial u^{(k)},$$
$$k = 0, 1, \ldots, n.$$

Примечание референта. Теорема 1 неверна. Так, например, уравнение

$$u(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, u^m(y)\, dy,$$

где $K(x, y) = 1$, для $0 \leqslant y \leqslant x$; $= 0$ для $x < y \leqslant 1$; при $\lambda \neq 0$, кроме тривиального решения, имеет еще 2 линейно независимых решения: $u_1(x) = e^{x/\sqrt{\lambda}} - 1$; $u_2(x) = e^{-x/\sqrt{\lambda}} - 1$. Теорема 1 будет справедлива, если в условии 2 потребовать непрерывность ядра $K(x, y)$ и его частных производных по x (это требование можно ослабить).

В формулировке теоремы (2) следует ввести аналогичную поправку. *Ю. К. Ландо*

2249 Д. О граничных задачах линейного сопряжения и о сингулярных интегральных уравнениях. Гегелия Т. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Тбилис. ун-т, Тбилиси, 1954

2250 Д. Сингулярные интегральные уравнения в пространствах с весом. Фрейдкин С. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1954

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2251. Подход Каратеодори к решению задач вариационного исчисления. Бёрнер (Carathéodory's Eingang zur Variationsrechnung. Boerner Hermann), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1953, 56, № 2/3, ч. 1, 31—58 (нем.)

Отмечается большая роль, которую сыграл Каратеодори в развитии вариационного исчисления. Дается подробный обзор результатов, полученных Каратеодори (а также другими авторами) при помощи разработанных им методов. В §§ 1—11 для вариационной задачи вида

$$I_C = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x_1, \ldots, x_n, x_1', \ldots, x_n')\, dt = \min,$$

рассматриваемой в классе допустимых кривых $C: x_i = x_i(t)$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$; $i = 1, 2, \ldots, n$, дается понятие поля экстремалей, выводятся дифференциальные уравнения Эйлера, находятся необходимые условия Вейерштрасса, Лежандра, условия трансверсальности, дается теория Гамильтона — Якоби, рассматриваются случай задачи с подвижными концами, случаи разрывных вариационных задач и задач, решениями которых являются кривые с угловыми точками. §§ 12—14 посвящены теории задач с кратными интегралами вида

$$I = \int_D \ldots \int L\, dt_1 \ldots dt_\mu = \min,$$

где $L = L\left(t_1, \ldots, t_\mu, x_1, \ldots, x_n, \frac{\partial x_1}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial t_\mu}\right)$,

рассматриваемых в классе допустимых поверхностей $x_i = x_i(t_1, \ldots, t_\mu)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. В них подробно излагаются результаты по теории поля для задач с кратными интегралами (включая результаты Каратеодори и автора), указываются трудности в теории поля для таких задач и имеющиеся достижения. Имеются подстрочные ссылки на литературу.

М. К. Керимов

2252. Об относительном минимуме в задачах вариационного исчисления n-го порядка. Маджинес (Sul minimo relativo nei problemi di calcolo delle variazioni di ordine n. Magenes Enrico), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, 2, 139—141 (итал.)

При исследовании на относительный минимум вариационных задач вида

$$I(C) = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx = \min \qquad (1)$$

обычно рассматриваются допустимые кривые $C: y = y(x)$, расположенные в ε-окрестности n-го порядка (случай слабого минимума) или $(n-1)$-го порядка (случай сильного минимума) кривой $C_0: y = y_0(x)$, реализующей решение задачи (1) (понятие ε-окрестности n-го порядка см. Лаврентьев М. А., Люстерник Л. А., Курс вариационного исчисления, М.—Л., ОНТИ, 1938, 35).

Задачу (1) можно рассмотреть и для ε-окрестности q-го порядка, $0 < q < n-1$, при некотором ограничении на $y^{(n-1)}$ (Levi E. E., Ann. mat. pura ed appl., 1913, сер. 3, **21**, 173—218).

В реферируемой работе для задачи (1) находятся достаточные условия минимума в более общем случае ε-окрестности нулевого порядка.

Утверждается, что если, в отличие от известных методов получения достаточных условий минимума, каждую допустимую кривую C из ε-окрестности нулевого порядка кривой C_0 заменить допустимой кривой C^* из ε-окрестности $(n-1)$-го порядка кривой C_0 с $I(C) \geqslant I(C^*)$, то на основании условий Эйлера, Лежандра, Вейерштрасса и Якоби нетрудно получить неравенства

$$I(C^*) \geqslant I(C_0), \quad I(C) \geqslant I(C_0).$$

Используя некоторые результаты Чинкуини о существовании абсолютного минимума интеграла $I(C)$ (Cinquini S., Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. enatur., 1948, 4, 675—682), можно определить кривую C^*.

Утверждается, что в случае задачи (1) к известным достаточным условиям Эйлера, Лежандра, Вейерштрасса и Якоби нужно добавить следующее: должна существовать ε-окрестность нулевого порядка кривой C_0 такая, что в ней при любых y', y'', $\ldots y^{(n)}$ удовлетворяются условия:

$$F_{y^{(n)}y^{(n)}}(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant 0,$$
$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) \geqslant M,$$

при $|y^{(n)}| \to +\infty$ $|F / y^{(n)}| \to +\infty$ равномерно относительно $(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, где M — некоторая постоянная.

Все утверждения приведены без доказательств. Подробное изложение результатов опубликовано в журнале Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1952, 21, 1—24. *М. К. Керимов*

2253. О полунепрерывности интегралов вариационного исчисления в непараметрической форме. I, II. Конти (Sulla semicontinuità degli integrali del calcolo delle variazioni in forma ordinaria. I, II. Conti Roberto), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **15**, № 3—4, 149—157, 158—164 (итал.)

Пусть A — замкнутое ограниченное множество точек плоскости (x, y). Функция $f(x, y, z)$ определена и непрерывна при $(x, y) \in A$ и $|z| < +\infty$. Ω — класс кривых $C: y = y(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ ($[a, b]$ может быть разным для различных кривых), удовлетворяющих условиям:

1) $y(x)$ непрерывна на $[a, b]$;
2) $(x, y(x)) \in A$ при $x \in [a, b]$;
3) $y(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$;

4) интеграл $I_C = \int_C f(x, y, y')\,dx = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$

существует и конечен.

Класс Ω^* определяется заменой условия 3) на условие

3*) $y(x)$ абсолютно непрерывна.

Тонелли (Tonelli L., Fondamenti di calcolo delle variazioni, Bologna, vol. 1, 1921) установил, что если $C \in \Omega^*$, то для того чтобы функционал I_C был полунепрерывен снизу, необходимо, чтобы функция $f(x, y, y')$ удовлетворяла условию квазирегулярности.

Автор, рассматривая полунепрерывность функционала I_C на более широком классе функций Ω, доказывает следующую теорему:

Если функционал I_C полунепрерывен снизу на кривых класса Ω, то для всех $(x, y) \in A$ функция $f(x, y, z)$ не зависит от переменного z.

Эта теорема распространяется на подинтегральные функции, зависящие от производных порядка выше первого.

Доказательство теоремы основано на следующей лемме:

Пусть $\varphi(x)$ определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$, тогда какие бы λ и $\varepsilon > 0$ не были заданы, найдется функция $\theta(x)$, непрерывная на $[\alpha, \beta]$ и имеющая на нем ограниченную вариацию, производная которой почти всюду равна λ и такая, что на $[\alpha, \beta]$

$$|\varphi(x) - \theta(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Эти результаты автора находятся в соответствии с известным результатом М. А. Лаврентьева (Ann. mat. pura ed appl., 1927, 4, 7—28).

Функционал I_C слабо полунепрерывен снизу на кривой $C_0: y = y_0(x)$, $x \in [a_0, b_0]$, из Ω, если для каждой последовательности кривых из Ω $\{C_n : y = y_n(x),\ x \in [a_n, b_n]\}$ такой, что $\{y_n\}$ равномерно сходится к y_0 (Tonelli L., цитированная книга, стр. 76) и $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{a_n'}^{b_n'} |y_n'(x) - y_0'(x)|\,dx = 0$, имеем $\underline{\lim}\, I_{C_n} \geqslant I_{C_0}$. Здесь $[a_n', b_n'] \supseteq [a_n, b_n] \cup [a_0, b_0]$ и $y_n'(x)$, $y_0'(x)$ полагаются равными 0 там, где они не определены или равны ∞. Доказывается, что в классе Ω справедлив следующий критерий полунепрерывности:

Если для каждого замкнутого ограниченного подмножества $G \subset A$ можно выбрать такие числа λ, Λ ($\Lambda \geqslant 0$), что

$$f(x, y, z) > \lambda - \Lambda|z|, \quad (x, y) \in G, \quad |z| < +\infty,$$

то I_C слабо полунепрерывен снизу в Ω.

Доказательство критерия проводится так же, как доказывается критерий полунепрерывности Тонелли.

Показывается, что интеграл Дирихле не обладает свойством полунепрерывности по отношению к совокупности функций с ограниченной вариацией.

Г. И. Шилова

2254 К. Собрание сочинений. Т. 1. Вариационное исчисление. Каратеодори (Gesammelte mathematische Schriften (5 Bde). Bd. I. Variationsrechnung. Carathéodory Constantin, XII+426 S., Fig., I Titelb., München, Beck, 1954, 42 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 30, 1452 (библ.)

2255 Д. Об области существования полей экстремалей. Штрикслер (Über den Existenzbereich der Extremalenfelder. Strickler Paul, Diss. Zürich. Phil., 45 S., 1954, 8 sfr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 42, 2050 (библ.)

См. также: 2057

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

2256. О круговых многочленах Цернике и родственных ортогональных системах. Бхатия, Вулф (On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets. Bhatia A. B., Wolf E.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, ч. 1, 40—48 (англ.)

Цернике (Zernike F., Physica, 's Grav., 1947, **13**, 605) ввел в связи с решением некоторых оптических задач систему многочленов $U_n^m(x, y)$, ортогональных на единичном круге $x^2 + y^2 \leqslant 1$ и инвариантных относительно поворота осей координат, т. е. таких, что $U_n^m(x, y) = G(\varphi)\, U_n^m(x', y')$, где $x' = x\cos\varphi + y\sin\varphi$, $y' = -x\sin\varphi + y\cos\varphi$. Доказывается, что всякий многочлен $V(x, y) = V(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$ степени n будет инвариантен относительно поворота осей координат тогда и только тогда, когда он представим в виде $R(r)\exp(il\varphi)$, где l — любое целое число, а $R(r)$ — многочлен степени n, не содержащий степеней ниже $|l|$ и одинаковой четности с l. В отличие от подхода Цернике, который получил многочлены $U_n^m(x, y)$ как собственные функции некоторого дифференциального уравнения с частными производ-

ными второго порядка, авторы характеризуют их следующими свойствами: система многочленов Цернике (с точностью до постоянных множителей) является единственной системой многочленов: 1) ортогональных на единичном круге, 2) инвариантных относительно поворота осей координат, 3) содержащей многочлены $R(r)\exp(il\varphi)$ для любых допустимых значений n и l, т. е. для $n \geqslant 0$, l — произвольного целого, $n \geqslant |l|$, $n \equiv |l| \pmod 2$ (существует бесконечное множество существенно отличных систем, удовлетворяющих только условиям 1) и 2)). Выводится данное Цернике выражение для $R_n^{m_i}(r)$, $U_n^m(x, y) = R_n^m(r)\exp(\pm im\varphi)$

$$R_n^m(r) = \sum_{s=0}^{(n-m)/2} \frac{(-1)^s (n-s)!\, r^{n-2s}}{s!\,\{(n+m)/2-s\}!\,\{(n-m)/2-s\}!},$$

а также производящая функция

$$\sum_{s=0}^{\infty} z^s R_{m+2s}^m(r) = \frac{[1+z-\sqrt{1-2z(1-2r^2)+z^2}]^m}{(2zr)^m\sqrt{1-2z(1-2r^2)+z^2}}.$$

Аналогичная задача решается для многочленов трех переменных: x, y и $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $W(x, y, z) = S(r)\exp(il\varphi)$. Единственной (с точностью до постоянных множителей) системой таких многочленов, удовлетворяющей условиям 1), 2) и 3), является та, для которой

$$S_n^m(r) = [r^{m+n+1}(r-1)^{n-m}]^{(n-m)}/r^{m+1}(n-m)!$$

производящей функцией

$$\sum_{s=0}^{\infty} z^s S_{m+s}^m(r) = \frac{[1+z-\sqrt{1+2z(1-2r)+z^2}]^{2m+1}}{r^{m+1}(2z)^{2m+1}\sqrt{1+2z(1-2r)+z^2}}.$$

При этом $rS_n^m(r^2) = R_{2n+1}^{2m+1}(r)$. *В. И. Левин*

2257. Многочлены от x, принимающие целочисленные значения для целочисленных x. **Вакулич А.**, Бюл. Польск. АН, 1954, **2**, № 3, 107—109

Дается решение вопроса, поставленного В. Серпинским, о нахождении всех многочленов от x с действительными коэффициентами, принимающих целочисленные значения для целочисленных x.

Доказывается, что для того чтобы многочлен от x степени n (где n — натуральное число) принимал целочисленные значения для всякого целочисленного x, необходимо и достаточно, чтобы он имел вид:

$$a_0\binom{x}{n} + a_1\binom{x}{n-1} + \ldots + a_{n-1}\binom{x}{1} + a_n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — целые числа.

Теорема обобщает результаты Диксона (Dickson L., Amer. J. Math., 1928, 50, 1—48) и Джемса (James R., Amer. J. Math., 1934, 56, 303—315). *А. К. Харадзе*

2258. Рациональные функции Золотарева. Обзор. **Пилоти** (Zolotareffsche rationale Funktionen. Zusammenfassender Bericht. Piloty H.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 4—5, 175—189 (нем.)

Рациональные функции, впервые введенные Е. И. Золотаревым в работе 1877 г. «Приложение эллиптических функций к вопросам о функциях, наименее и наиболее отклоняющихся от нуля» (Золотарев Е. И., Полное собрание сочинений, изд-во АН СССР, 1932, т. II), находят применение в некоторых технических вопросах и в первую очередь в теории электрических фильтров. Автор обзора поставил задачу изложить в доступной форме свойства функций Золотарева, имеющие значение для технических расчетов. При этом доказательства лишь намечены, а в отдельных случаях вынесены в приложения.

Раздел I посвящен определениям и параметрическому представлению. В разделе II изучается поведение функций Золотарева, главным образом, на вещественной оси. В разделе III дается при различных значениях постоянной C решение уравнения $F(z) = C$, где $F(z)$ — функция Золотарева. В соответствии с техническими запросами рассматриваются случаи, когда C имеет значения вещественные, чисто мнимые или равные по модулю единице.

Имеется несколько графиков. Библиография отсутствует. *Н. И. Ахиезер*

2259. Общие методы решения функциональных уравнений некоторых типов. **Ацел** (Grundriß einer allgemeinen Behandlung von einigen Funktionalgleichungstypen. Aczél J.), Publs mathematicae, 1953, **3**, № 1—2, 119—132 (нем.)

Для функциональных уравнений

1) $f(u) = F[f(x), f(y)]$, где $u = x+y$; $(x+y)/2$; $ax+by+c$.
2) $f(x+y) = H[f(x), y]$,
3) $G[f(x+y), f(x-y), f(x), x, y] = 0$,
4) $F[f(x+y), f(x-y), f(x), f(y), x, y] = 0$

даны методы решения и, по большей части, теоремы существования и единственности. Намечены также методы решения для уравнений типов $f(ax+by+c) = F[f(x), f(y), x, y]$, $f[G(x, y)] = H[f(x), y]$.

Решение заключается обычно в построении значений $f(x)$ на всюду плотном множестве точек. Иногда применяются другие приемы. Так, решение уравнения 4) при $y = 0$, $f(0) = a$, $f(x) = z$ сводится к решению уравнения $F[z, z, z, a, x, 0] = 0$, относительно z и проверке того, удовлетворяет ли найденная таким образом функция исходному функциональному уравнению. *М. К. Гавурин*

2260. Замечание к одной задаче Ван-дер-Поля. **Хенрич** (Bemerkung zu einer Aufgabe von Herrn van der Pol. Henrici P.), Elem. Math., 1954, **9**, № 4, 82—84 (нем.)

Доказывается равенство

$$\varphi(m) = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{km}}{(km+1/2)_m} = \frac{2^{-m-1}}{(m-1)!}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-z^2)^{m-1}}{1\mp z^{2m}}\,dz,$$

где $(a)_0 = 1$, $(a)_m = a(a+1)\ldots(a+m-1)$ при $m \geqslant 1$, верхний знак берется при четном, а нижний — при нечетном m. Из него с помощью теории вычетов

выводится формула

$$\varphi(m) = (\pi/4m!) \sum_{|k|<m/2} (-1)^k (\cos(k\pi/m))^{m-1}.$$

В частности, при $m = 3$ получается равенство, дающее ответ на вопрос Ван-дер-Поля (Elem. Math., 1952, **7**, 48, Aufgabe 154). Как замечает автор, оно давно известно. *Ф. И. Харшиладзе*

2261. О вычислении интеграла Дирихле. Лакшмана-Рао (On the evaluation of Dirichlet's integral. Lakshmana Rao S. K.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 6, 411—413 (англ.)

Для вычисления известного интеграла

$$A_n = \int\limits_{(R_n)} \dots \int \left(1 - \sum_{k=1}^{n} x_k\right)^{\alpha_0 - 1} \prod_{k=1}^{n} x_k^{\alpha_k - 1}\, dx_1 \dots dx_n,$$

где $\alpha_0 > 0, \dots, \alpha_n > 0$, $R_n \{x_1 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0, x_1 + \dots + x_n \leqslant 1\}$, автор использует преобразование Лапласа L и то обстоятельство, что A_n является значением при $x = 1$ свертки $x^{\alpha_0 - 1} * \dots * x^{\alpha_n - 1}$ функций, для которых преобразования Лапласа легко находятся. Таким образом

$$A_n = L^{-1}\left\{\frac{\Gamma(\alpha_0)}{p^{\alpha_0}} \dots \frac{\Gamma(\alpha_n)}{p^{\alpha_n}}\right\} = \frac{\Gamma(\alpha_0) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_0 + \dots + \alpha_n)}.$$

Аналогично вычисляется более общий интеграл

$$\int\limits_{(R_n)} \dots \int x_1^{\alpha_1 - 1} \dots x_n^{\alpha_n - 1} g(x_1 + \dots + x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1) \dots \Gamma(\alpha_n)}{\Gamma(\alpha_1) + \dots + \Gamma(\alpha_n)} \int_0^1 t^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n - 1} g(t)\, dt.$$

М. К. Фаге

2262. Тригонометрия из дифференциальных уравнений. Ричмонд (Trigonometry from differential equations. Richmond D. E.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 5, 337—340 (англ.)

Основные формулы элементарной тригонометрии могут быть получены из рассмотрения свойств решений дифференциального уравнения $y'' + y = 0$.

Ф. В. Широков

2263 К. Сборник задач по курсу математического анализа. Берман Г. Н. (Для вузов), изд. 5-е, стереотип., 528 стр., М., Гостехиздат, 1954, 8 р. 60 к.

См. РЖМат, 1953, 789 К.

2264 К. Курс математического анализа. Бермант А. Ф. (Учеб. пособие для втузов), М., Гостехиздат, ч. 1, изд. 7-е, перераб., 1953, 467, 10 р. 15 к.; ч. 2, изд. 5-е, перераб., 1953, 359, 7 р. 85 к.

Переработанное издание распространенного двухтомного учебника автора (за основу принято издание 1950/1951 г.). Переработка заключалась в устранении замеченных дефектов, в исключении из книги материала, выходящего за пределы программ обычных втузов, в упрощении изложения, в улучшении литературного стиля и т. п. Методологические принципы построения курса сохранились прежние.

В книге имеется много полезных исторических справок (как в специальном параграфе введения, так и в подстрочных примечаниях).

Содержание. Часть 1: Введение (некоторые исторические замечания и понятие действительного числа); Гл. 1. Функция; Гл. 2. Предел; Гл. 3. Производная и дифференциал. Дифференциальное исчисление; Гл. 4. Исследование функций и линий; Гл. 5. Определенный интеграл; Гл. 6. Неопределенный интеграл. Интегральное исчисление; Гл. 7. Способы вычисления определенных интегралов. Несобственные интегралы; Гл. 8. Применения интеграла; Гл. 9. Ряды. Предметный указатель.

Часть 2: Гл. 10. Функции нескольких переменных. Дифференциальное исчисление; Гл. 11. Применения дифференциального исчисления; Гл. 12. Многомерные интегралы и кратное интегрирование; Гл. 13. Криволинейные интегралы и интегралы по поверхности; Гл. 14. Дифференциальные уравнения; Гл. 15. Тригонометрические ряды (в частности, имеются параграфы о методе Крылова улучшения сходимости тригонометрических рядов и о практическом гармоническом анализе). Предметный указатель.

М. К. Керимов

2265 К. Специальный курс тригонометрии. Новоселов С. И. (Для пед. ин-тов), 464 стр., изд-во «Сов. наука», М., 1953

2266 РжФ. Высшая математика. Акицуки, Судзуки (高等代數學. 秋月康夫, 鈴木通夫), 212 стр., 岩波全書 Иванами Дзэнсё Япония, 1952 [**Рецензия: Хигаси** (東屋五郎), 科學, (Кагаку), 1953, **23**, № 1, 47—48 (япон.)]

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

2267. О перестановках в условно сходящихся рядах. Безикович (On rearrangement of conditionally convergent series. Besicovitch A. S.), J. London Math. Soc., 1953, **28**, ч. 4, № 112, 480—483 (англ.)

Рассматривается ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x), \qquad (1)$$

где $u_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$ и при всяком x, причем ряд из положительных членов и ряд из отрицательных членов в отдельности оба расходятся. Предполагая, что $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, автор доказывает два предложения:

1. Существует ряд (1) такой, что при любой перестановке его членов он сходится к нулю всюду, кроме, быть может, счетного множества точек.

2. Существует ряд (1) такой, что при любой перестановке его членов он расходится для всех x, кроме, быть может, счетного множества точек. *Н. К. Бари*

2268. Относительный рост некоторых быстро возрастающих последовательностей. Купер (The relative growth of some rapidly increasing sequences. Cooper R.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 1, № 113, 59—62 (англ.)

Пусть α, ρ; β, σ — положительные числа, причем $\sigma > \rho$ или $\sigma = \rho$, а $\beta > \alpha$.

Пусть f_0, g_0 — числа, соответственно большие наибольших из корней уравнений $x = \exp(\alpha x^{\rho})$, $x = \exp(\beta x^{\sigma})$, если эти уравнения имеют действительные корни; в противном случае f_0, g_0 — любые положительные числа. При помощи рекуррентных формул $f_{n+1} = \exp(\alpha f_n^{\rho})$, $g_{n+1} = \exp(\beta g_n^{\sigma})$ определяются неограниченно возрастающие последовательности $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$. Доказывается существование такого числа K, что если расположить все члены последовательностей $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$, большие K, в одну возрастающую последовательность, то эта последовательность строго возрастает и ее члены берутся поочередно из последовательностей $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$. Эта теорема показывает, что все последовательности типа $\{f_n\}$ возрастают примерно с одной скоростью.

Ф. В. Широков

2269. О вычислении некоторых сумм. Серенте (Sul calcolo di certe somme. Serpente Guido), Riv. mat. Univ. Parma, 1953, **4**, № 3, 219—226 (итал.)

В работе вычисляются суммы вида

$$S_{m,n} = g_0 a_0^n + g_1 a_1^n + \cdots + g_m a_m^n$$

($m = 0, 1, 2, \ldots$; $n = 0, 1, 2, \ldots$), где числа $a_0, a_1, \ldots, a_\mu, \ldots$ образуют арифметическую прогрессию с разностью d, а числа $g_0, g_1, \ldots, g_\mu, \ldots$ образуют геометрическую прогрессию со знаменателем q.

При вычислении этих сумм используются следующие обозначения. Биномиальным произведением $a_n^n\ b_n$ двух последовательностей a_n и b_n ($n=0, 1, 2, \ldots$) называется последовательность γ_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), определяемая соотношением

$$\gamma_n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a_n b_{n-k}. \qquad (1)$$

Биномиальным отношением $b_n = \frac{\gamma_n}{a_n}\Big|\, n$ двух последовательностей γ_n и a_n ($n = 0, 1, 2, \ldots$), $a_0 \neq 0$, называется последовательность b_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$), удовлетворяющая условию (1).

По поводу этих обозначений см. статьи Мамбриани (Mambriani A., Ann. mat. pura ed appl., 1930, (4) 8, 103—139; 1931, (4) 9, 25—56).

В этих обозначениях автор устанавливает справедливость следующей основной формулы:

$$S_{m,n} = \frac{g_0 a_0^n - g_{m+1}\, a_{m+1}^n \Big|\, n}{\varepsilon_n - q d^n},$$

где $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_n = 0$ при $n \neq 0$ — единичная последовательность.

Автор выражает также суммы $S_{m,n}$ через числа Бернулли, Эйлера и др.

Э. Апарисио

2270. Об одной специальной тауберовой теореме. Левитан Б. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1953, **17**, № 3, 269—284

Обозначения: $\sigma(\mu)$ ($-\infty < \mu < \infty$) — комплексная функция, удовлетворяющая условию

$$\sup_{-\infty<a<\infty} (1 + |a|)^{-k} \operatorname*{var}_{a}^{a+1} \{\sigma(\mu)\} \leqslant M < \infty$$

($k \geqslant 0$ — целое),

$E_{k+2}(\alpha)$ — ее «преобразование Бохнера — Стилтьеса»

$$E_{k+2}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty} \frac{e^{-i\alpha\mu}}{(-i\mu)^{k+2}}\, d\sigma(\mu) + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1} \frac{e^{-i\alpha\mu} - L_{k+1}(\alpha\mu)}{(-i\mu)^{k+2}}\, d\sigma(\mu) \right\};$$

где

$$L_{k+1}(\beta) = \sum_{\nu=0}^{k+1} (-i\beta)^{\nu} / \nu!$$

(формулы для $E_{k+2}(\alpha)$, $L_{k+1}(\beta)$ в статье содержат опечатки).

Устанавливается теорема: Если для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ и функция $\sigma_\delta(\mu)$, преобразование Бохнера — Стилтьеса которой в интервале $(-\delta, \delta)$ есть многочлен $(k+1)$-й степени и которая удовлетворяет неравенству

$$\sup_{-\infty<a<\infty} (1 + |a|)^{-k} \operatorname*{var}_{a}^{a+1} \{\sigma(\mu) - \sigma_\delta(\mu)\} < \varepsilon,$$

то $\sigma(\mu) = o(|\mu|^{k+1})$ при $|\mu| \to \infty$. Затем доказывается теорема, дающая уточненную оценку $\sigma(\mu)$ или некоторого ее итерированного неопределенного интеграла в зависимости от порядка функции $\delta(\varepsilon)$. Доказательство этих результатов основано на следующем обобщении неравенства Бора: если преобразование Бохнера — Стилтьеса функции $\sigma(\mu)$ в интервале $(-\Lambda, \Lambda)$ $(0 < \Lambda \leqslant 1)$ есть многочлен $(k+1)$-й степени, то существует константа A такая, что

$$\sup_{-\infty<\mu<\infty} (1 + |\mu|)^{-k} |A + \sigma(\mu)| \leqslant CM / \Lambda^{k+1},$$

где C зависит только от k.

Эти результаты для случая $k = 0$ были опубликованы автором ранее и использованы им для изучения асимптотического поведения спектральной функции самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка (Левитан Б. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, **16**, № 4, 325—352). Указывается, что в общем случае они могут быть применены к исследованию аналогичных вопросов для дифференциальных уравнений в частных производных.

Б. И. Коренблюм

2271. Об одной теореме тауберова типа. Фрёйд (Egy Tauber típusú tételről. Géza Freud), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, **3**, № 1, 45—53 (венг.)

В работе автора (Acta math. Acad. sci., hung., 1951, 2, 299—308) об остаточном члене в тауберовой теореме Харди и Литтльвуда доказано, что если $F(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, d\tau(t)$, где $f(t) \geqslant 0$ и $\tau(t)$ — монотонно возрастающая функция, сходится при $s > 0$, и если

$$F(s) = As^{-\alpha}\, \Gamma(\alpha+1)\, [1 + r(s)], \quad \text{при } s \to +0,$$

где $|r(s)| < c_0 s^{\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, то $\int_0^x f(t)\,d\tau(t) = Ax^{\alpha}(1+\rho(x))$, где $|\rho(x)| < c_1/\log x$ (как показано Кореваарром, результат улучшить нельзя). В настоящей работе дается простое доказательство этого предложения в случае $\alpha = 1$, не использующее сложных конструкций исходной работы. В работе имеется много мелких ошибок, что очень затрудняет ее чтение. (В формулировке теоремы Таубера должно быть o, а не 0; в формуле в начале стр. 48 должно быть $|\pi/2 - \vartheta| \leqslant 2|\cos\vartheta|$; $\int_0^{\pi} q_{\nu}(\cos\vartheta)d\vartheta = \pi/\nu$; неверно написана формула (35) — там должно быть $\int_0^{\infty} f(t)\,p_{\nu}(e^{-st})\,e^{-st}\,d\tau(t)$, это ведет к ошибке в выкладке (38), которая, впрочем, элиминируется в окончании выкладки (46). *А. Г. Постников*

2272. Методы суммирования. Питерсен (Methods of summation. Petersen G. M.), Pacif. J. Math., 1954, **4**, № 1, 73—77 (англ.)

Говорят, что ряд $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_{\nu}$ суммируется методом $(\mathrm{Б}_h, 1)$ к числу S, если

$$\sum_{\nu=0}^{n} u_{\nu} \cos[\pi\nu/2(n+h)] \to S \text{ при } n \to \infty.$$

Доказывается, что метод $(\mathrm{Б}_h, 1)$ при $h < 0$ сильнее метода средних арифметических Чезаро. Случаи $h \geqslant 0$ были раньше исследованы другими авторами. Кроме того, доказывается теорема:

Если для некоторого ряда $\sigma_n = [(n+2)S_n + S_{n+1}]/(n+3) \to \sigma$, где S_n частная сумма ряда, то $S_n = C\cdot(-1)^{n-1}(n+1)! + \sigma_n'$, где $\sigma_n' \to \sigma$, а C — постоянная. *Ф. И. Харшиладзе*

2273. Теорема Мерсера о суммируемости. Агнью (Mercer's summability theorem. Agnew Ralph P.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, ч. 1, № 113, 123—125 (англ.)

Автор сравнивает обобщение теоремы Мерсера, данное Лавом (Love E. R., J. London Math. Soc., 1952, **27**, 413—428), с теоремой, доказанной автором (Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 550—556), а именно: Пусть $\|c_{nk}\|$ — матрица регулярного метода суммирования, $\{s_n\}$ — ограниченная последовательность, если $s_n - q\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\,s_k \to (1-q)L$ при $n \to \infty$ и $|q| < \liminf_{n\to\infty}\left[1/\sum_{k=1}^{\infty}|c_{nk}|\right]$, то $s_n \to L$ (Лав); если $\sum_{k=1}^{\infty} c_{nk}\,s_k \to L$ при $n \to \infty$ и $\liminf_{n\to\infty}\left[|c_{nk}| - \sum_{k=1}^{*\infty}|c_{nk}|\right] > 0$, то $s_n \to L$ (Агнью). * при знаке Σ означает, что $k \neq n$.

Автор показывает, что его теорема является более общей, и отмечает, что остальные результаты цитированной работы Лава могут быть обобщены аналогично.

На стр. 124 опечатка: вместо $a_{nn} \to 1/2$ должно быть $c_{nn} \to 1/2$. *Ф. В. Ширков*

2274. О суммируемости двойных рядов методом Лебега. Тевзадзе Н., Тр. Тбилис. ун-та, 1954, **52**, 19—20 (резюме груз.)

Доказывается эквивалентность двух равенств

$$\Sigma_{m,n}\,a_{m,n} = S \text{ и}$$

$$\lim_{(u,v)\to 0}\ \Sigma_{m,n}\,a_{mn}\frac{\sin mu}{mu}\frac{\sin nv}{nv} = S$$

в предположении, что двойной ряд $\Sigma_{m,n}\,a_{mn}$ удовлетворяет условиям $\Sigma_m|a_{mn}| = O(1/n)$ и $\Sigma_n|a_{mn}| = O(1/m)$.

Этот результат является усилением другого результата автора (РЖМат, 1953, 321). *Ф. И. Харшиладзе*

2275. Обсуждение диссертации Фрейда «Теоремы тауберова типа с остаточным членом». Часар (Freud Géza «Tauber-tipusú tételek maradéktaggal». Császár Ákos), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, **4**, № 2, 288—291 (венг.)

2276. Открытое обсуждение кандидатской диссертации Тандори К. «Суммирование по Чезаро ортогональных рядов полиномов». Феньё (Tandori Károly kandidátusi disszertációjának nyilvános vitája. Fenyö István), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, **4**, № 2, 292—295 (венг.)

2277 К. Ряды Фурье. Толстов (Перев. с русс.) (Szeregi Fouriera. Tolstov G., 336 s., Warszawa, Państw. Wydawn. Nauk, 1954, 26.50 zł.), Przew. bibliogr., 1954, **10**, № 27, 361 (библ.)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

2278. Система производящих функций для бесселевых многочленов. Брафман (A set of generating functions for Bessel polynomials. Brafman Fred), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 2, 275—277 (англ.)

Бесселевы многочлены $f_n^{(c)}(x)$ имеют вид (РЖМат, 1953, 317):

$$f_n^{(c)}(x) = {}_2F_0(-n, c+n; -; x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-n)_k(c+n)_k}{k!}x^k.$$

Для этих многочленов в статье дано семейство производящих функций, зависящее от одного параметра α:

$$ {}_2F_0(\alpha, c-\alpha; -; [t-(t^2-4xt)^{1/2}]/2)\times$$
$$\times {}_2F_0(\alpha, c-\alpha; -; [t+(t^2-4xt)^{1/2}]/2) \sim$$
$$\sim \sum_{n=0}^{\infty}(\alpha)_n(c-\alpha)_n f_n^{(c)}(x)\,t^n/n!. \qquad (1)$$

Ряд ${}_2F_0(\alpha, \beta; -; x)$ расходится, за исключением случая, когда α или β — целое отрицательное. Соотношение (1) понимается в смысле равенства коэффициентов при одинаковых степенях t. *Л. М. Глускин*

2279. О функциях Чебышева — Эрмита $H(z, \lambda)$. Рабинович Ю. Л., Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 165, Математика, **7**, 98—117

В работе изучаются свойства функций Чебышева — Эрмита

$$H_{\lambda}(z) = 2^{\lambda}\sqrt{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)}{k!\,\Gamma((k-\lambda+1)/2)}z^k$$

(z и λ — произвольные комплексные переменные), которые при целых положительных значениях $\lambda = n$ совпадают с полиномами Чебышева — Эрмита $H_n(z)$.

Автор получает различные интегральные представления для рассматриваемых функций, исследует их асимптотическое поведение при условии, что одна из переменных остается ограниченной, а другая неограниченно возрастает, изучает распределение нулей и т. д.

Так как функции $H_\lambda(z)$ просто связаны с функциями параболического цилиндра $D_\lambda(z)$, именно

$$H_\lambda(z) = 2^{\lambda/2} \exp(z^2/2)\, D_\lambda(z\sqrt{2}),$$

часть результатов, полученных автором, непосредственно вытекает из известных формул для этих функций. В статье отсутствует указатель литературы. *Н. Н. Лебедев*

2280. Остаточный член формулы Хильба — Сегё и новая асимптотическая оценка корней ультрасферических полиномов. Гаттески (Il termine complementare nella formula di Hilb-Szegö ed una nuova valutazione asintotica degli zeri dei polinomi ultrasferici. Gattesch i Luigi), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **36**, 143—158 (итал.)

Для полинома Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)$ известна асимптотическая формула Хильба — Сегё:

$$[\sin(\vartheta/2)]^\alpha [\cos(\vartheta/2)]^\beta P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\vartheta) =$$
$$= N^{-\alpha}(\Gamma(n+\alpha+1)/n!)\sqrt{\vartheta/\sin\vartheta}\, J_\alpha(N\vartheta) + \sigma,$$

где $0 < \vartheta \leqslant \pi - \varepsilon$; $N = n + (\alpha+\beta+1)/2$; $\sigma = \vartheta^{1/2} O(n^{-3/2})$; $cn^{-1} < \vartheta \leqslant \pi - \varepsilon$; $\sigma = \vartheta^{\alpha+2} O(n^\alpha)$; $0 < \vartheta < cn^{-1}$; c означает надлежащим образом выбранную постоянную.

В работе дается уточнение остаточного члена в случае ультрасферического полинома $P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta)$, когда $\alpha = \beta = \lambda - 1/2$.

Доказывается неравенство $(0 < \lambda \leqslant 1)$:

$$|\sigma_n^\lambda(\cos\vartheta)| \leqslant 0{,}696\, \frac{\lambda(1-\lambda)}{(n+\lambda)^2} \binom{n+2\lambda-1}{n} \vartheta^{\lambda-1/2}$$

при $0 < \vartheta \leqslant \pi/2(n+\lambda)$; и неравенство

$$|\sigma_n^\lambda(\cos\vartheta)| < \frac{\lambda(1-\lambda)}{\Gamma(\lambda)} \left\{ 4{,}075 \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda-3} \vartheta^{-1/2} + \right.$$
$$\left. + 0{,}892 \left(\frac{n}{2}\right)^{\lambda-2} \vartheta^{1/2} \right\}$$

при $\pi/2(n+\lambda) < \vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$; где

$$\sigma_n^\lambda(\cos\vartheta) = \vartheta^{-1/2} (\sin\vartheta)^\lambda P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta) -$$
$$- \left(\frac{2}{n+\lambda}\right)^{\lambda-1/2} \frac{\Gamma(\lambda+1/2)\,\Gamma(n+2\lambda)}{n!\,\Gamma(2\lambda)} J_{\lambda-1/2}\{(n+\lambda)\vartheta\}.$$

Как следствие получается асимптотическая оценка r-го корня $\vartheta_{n,r}^{(\lambda)}$ полинома $P_n^{(\lambda)}(\cos\vartheta)$:

$$0 < \frac{j_{\lambda-1/2,\,r}}{n+\lambda} - \vartheta_{n,r}^{(\lambda)} < \frac{n!\, n^{2\lambda-5}}{\Gamma(n+2\lambda)}\, t(r,\lambda),$$
$$0 < \lambda < 1, \quad r = 1, 2, \ldots, [n/2],$$

где

$$t(r,\lambda) = \frac{\lambda(1-\lambda)(75+19r)(2r+\lambda-1)}{(3{,}24-(1-\lambda)^2)(2r+\lambda-1)-2{,}23}$$

и $j_{\lambda-1/2,\,r}$ означает r-й корень функции Бесселя $J_{\lambda-1/2}(x)$. *Н. С. Кошляков*

2281. Полиномы, присоединенные к ультрасферическим функциям второго рода. Оссичини (Polinomi associati alle funzioni ultrasferiche di seconda specie. Ossicini Alessandro), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 2, 170—177 (итал.)

Рассматриваются свойства полиномов $W_n^{(\lambda)}(x)$, входящих в соотношение

$$Q_n^{(\lambda)}(x) = [\Gamma(1/2)\,\Gamma(\lambda+1/2)/\Gamma(\lambda)] \times$$
$$\times [P_n^{(\lambda)}(x)\, I_\lambda(x) - W_{n-1}^{(\lambda)}(x)/(x^2-1)^{\lambda-1/2}],$$

где $P_n^{(\lambda)}(x)$—ультрасферический полином первого рода, $Q_n^{(\lambda)}(x)$ — ультрасферическая функция второго рода, определяемая формулой

$$Q_n^{(\lambda)}(x) = \frac{(-1)^n \Gamma(1/2)\,\Gamma(\lambda+1/2)\,\Gamma(n+2)}{2^n \cdot n! \cdot \Gamma(2\lambda)\,\Gamma(n+\lambda)} \times$$
$$\times (x^2-1)^{-\lambda+1/2} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2-1)^{n+\lambda-1/2} I_{n+\lambda}(x)],$$

$$I_\lambda(x) = \int_x^\infty (x^2-1)^{-\lambda-1/2} dx.$$

Выводятся рекуррентные формулы для $W_n^{(\lambda)}(x)$, дифференциальное уравнение этих полиномов и явное выражение полинома $W_n^{(\lambda)}(x)$:

$$W_n^{(\lambda)}(x) = [\Gamma(\lambda+1/2)/\Gamma(2\lambda)] \times$$
$$\times \sum_{s=0}^{n} \frac{K_{n,s}(n+s+1)!}{s!\,\Gamma(s-\lambda+3/2)\Gamma(n+2\lambda+1-s)} \left(\frac{1-x}{2}\right)^s,$$

где

$$K_{n,s} =$$
$$= \sum_{t=s+1}^{n+1} \frac{\Gamma(n+2\lambda+1)\,\Gamma(n+2\lambda+1-t)\,\Gamma(t-\lambda+2/3)}{t\Gamma(\lambda+t+1/2)\,(n+1+t)!\,(n+1-t)!}$$

Н. С. Кошляков

2282. Функции Лежандра 2-го рода и ультрасферические многочлены. Оссичини (Funzioni di Legendre di seconda specie e polinomi ultrasferici. Ossicini Alessandro), Boll. Unione mat. ital., 1953, 8, № 3, 304—309 (итал.)

Находятся суммы нескольких рядов, члены которых суть произведения ультрасферических многочленов $P_n^{(\lambda)}(x)$ и функций Лежандра 2-го рода $Q_m(z)$. В качестве образца приведем следующую формулу

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(\lambda+1/2)/\Gamma(\lambda)\, 2^{\lambda+1/2}(z-x)^{\lambda+1/2} =$$
$$= \sum_{n=0}^\infty (\lambda+n)\, Q_{n+\lambda-1/2}(z)\, P_n^{(\lambda)}(x).$$

И. П. Натансон

2283. Теоремы сложения для сферических волн. Фридман, Рассек (Addition theorems for spherical waves. Friedman Bernard, Russek Joy), Quart. Appl. Math., 1954, **12**, № 1, 13—23 (англ.)

Даются разложения или «теоремы сложения» для сферических волновых функций $j_n(kR)\,P_n^m(\cos\theta)\times\exp(im\varphi)$, $h_n^{(1)}(kR)\,P_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)$ и $h_n^{(2)}(kR)\times P_n^m(\cos\theta)\exp(im\varphi)$, отнесенных к началу O, в ряды по сферическим волновым функциям, отнесенным к началу O', имеющему координаты r_0, θ_0, φ_0 относительно O. *В. Д. Купрадзе*

2284. Оценка многочлена Лежандра и его производных в софокусном эллипсе. Пиконе (Maggiorazione di un polinomio di Legendre e delle derivate in un'ellisse a quello confocale. Picone Mauro), Boll. Unione mat. ital., 1953, **8**, № 3, 237—242 (итал.)

Комплексные числа a и b, $a\neq b$, автор называет фокусами многочлена Лежандра $P_n(z)=P_n(z,a,b)=[(z-a)^n(z-b)^n]^{(n)}/n!\,(b-a)^n$. Если z изменяется в софокусном эллипсе, то наибольшее значение величины $|P_n^{(k)}(z)|\,(0\leqslant k<n)$ достигается на концах большой оси и только в этих точках. Даны оценки $P_n^{(k)}(z)$ в упомянутом эллипсе. *И. П. Натансон*

2285. К интегрированию функций, содержащих произведения цилиндрических функций. Шуберт (Beiträge zur Integration von Funktionen, in denen Produkte von Zylinderfunktionen auftreten. Schubert Andreas), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1952/1953, **2**, № 3, 437—440 (нем.)

В работе рассматривается вопрос о вычислении интегралов вида $A_{n,p,q}=\int x^{2n+1}Z_{p-q}\overline{Z}_{p+q}dx$, $B_{n,p,q}=\int x^{2n+2}Z_{p-q}\overline{Z}_{p+q+1}dx$, где $Z_p=c_1J_p(\alpha x)+c_2N_p(\alpha x)$, $\overline{Z}_p=\overline{c}_1J_p(\alpha x)+\overline{c}_2N_p(\alpha x)$ — произвольные цилиндрические функции с коэффициентами c_1, c_2, $\overline{c}_1$, $\overline{c}_2$, не зависящими от индекса p.

С помощью элементарных рассуждений автор получает различные рекуррентные соотношения, например

$$2(n-q+1)A_{n,p,q}=2(n+q)A_{n,p,q-1}+x^{2n+2}(Z_{p-q}\overline{Z}_{p+q}-Z_{p-q+1}\overline{Z}_{p+q-1}),$$

которые в случае, когда n и q — целые положительные числа ($n\geqslant q$), позволяют свести интегралы рассматриваемого типа к известному интегралу

$$A_{0,p,0}=\int xZ_p\overline{Z}_p dx=x^2(Z_p\overline{Z}_p-Z_{p-1}\overline{Z}_{p+1})/2$$

и таким образом представить их в замкнутой форме через цилиндрические функции. *Н. Н. Лебедев*

2286. О функциях Гегенбауэра. Хенрич (Über die Funktionen von Gegenbauer. Henrici Peter), Arch. Math., 1954, **5**, № 1—3, 92—98 (нем.)

В работе (РЖМат, 1955, 236) автор, рассматривая решение уравнения

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{2\nu}{y}\frac{\partial u}{\partial y}+k^2u=0,\ \operatorname{Re}\nu>0, \qquad (1)$$

как функцию комплексных x и y, показал, что любое регулярное в окрестности точки $(x_0, 0)$ решение уравнения (1) однозначно представимо в виде ряда по некоторым вполне определенным нормальным решениям этого уравнения (см. также Векуа И. Н., Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., Гостехиздат, 1948, гл. 2); для фактического осуществления этого разложения им были указаны два метода.

В настоящей работе автор, относя уравнение (1) к биполярным координатам, применяет упомянутый результат к следующим двум решениям уравнения (1) при $k=0$:

$$\varphi_\alpha(\xi,\eta)\equiv(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)^\nu C_{\alpha-\nu}^\nu(\operatorname{ch}\xi)\cos\alpha\eta,$$

$$\psi_\alpha(\xi,\eta)\equiv(\operatorname{ch}\xi+\cos\eta)^\nu C_{\alpha-\nu}^\nu(\operatorname{ch}\xi)\sin\alpha\eta,$$

где α — произвольное число, удовлетворяющее условию $\alpha+\nu\neq0,-1,-2,\ldots$; $C_\mu^\nu(x)$ — функция Гегенбауэра; $\delta\operatorname{ch}\xi=1+r^2$; $\delta\cos\eta=1-r^2$; $\delta^2\equiv1+2r^2\cos2\vartheta+r^4$; $x=r\cos\vartheta$; $y=r\sin\vartheta$, и получает два соотношения — типа теорем сложения, — относящихся к функциям Гегенбауэра. Приведем одно из них

$$\varphi_\alpha(\xi,\eta)=K\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-\alpha)_{2n}}{(\nu)_{2n}}A_n(\alpha,\nu)\,r^{2n}C_{2n}^\nu(\cos\vartheta),$$

где $K=(2^\nu\Gamma(\alpha+\nu))/(\Gamma(\alpha-\nu+1)\Gamma(2\nu))$,

$$A_n(\alpha,\nu)={}_4F_3\left[\begin{matrix}\frac{\nu+\alpha}{2},&\frac{\nu+\alpha+1}{2},&-n+\frac12,&-n;\\ \nu+\frac12,&\frac{\alpha+1}{2}-n,&\frac{\alpha+2}{2}-n&\end{matrix}\ 1\right];$$

другое дает разложение $\psi_\alpha(\xi,\eta)$ по функциям $r^{2n+1}C_{2n+1}^\nu(\cos\vartheta)$. Соответственно двум возможностям получения искомых разложений автор находит еще два разложения функций $\varphi_\alpha(\xi,\eta)$ и $\psi_\alpha(\xi,\eta)$ по тем же соответственно функциям $r^{2n}C_{2n}^\nu(\cos\vartheta)$ и $r^{2n+1}\times C_{2n}^\nu(\cos\vartheta)$. Так, например,

$$\varphi_\alpha(\xi,\eta)=K\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(-2\alpha)_{2n}}{(2\nu)_{2n}}B_n(\alpha,\nu)\,r^{2n}C_{2n}^\nu(\cos\vartheta),$$

где $B_n(\alpha,\nu)={}_3F_2\left[\begin{matrix}\alpha+\nu,&(1-2n)/2,&-n;\\ (2\alpha-2n+1)/2,&\alpha-n+1;&\end{matrix}\ 1\right]$.

Сравнение рядов для одной и той же функции, в силу единственности соответствующих разложений, ведет к тождествам типа Кэли — Орра для обрывающихся обобщенных гипергеометрических рядов с аргументом, равным единице. *М. Н. Олевский*

2287. Гипергеометрический характер присоединенных полиномов Эрмита. Тоскано (Carattere ipergeometrico dei polinomi associati a quelli de Hermite. Toscano Letterio), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 2, 146—150 (итал.)

Устанавливается связь между гипергеометрическими функциями и присоединенными полиномами $G_n(x)$, входящими в формулу

$$h_n(x) = H_n(x)\,h_0(x) - G_{n-1}(x)\exp(x^2/2),$$

где $h_n(x)$ — функция Эрмита, $H_n(x)$ — полином Эрмита.

Доказывается формула

$$G_n(x) = n!\sum_{m=0}^{\leqslant n/2}(-1)^m\frac{{}_2F_1(-m,\,1;\,-n;\,2)}{m!\,(n-2m)!\,2^m}\,x^{n-2m},$$

где ${}_2F_1(\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,z)$ — обычная гипергеометрическая функция.

Вводя полиномы

$$\Psi_n^{(\alpha)}(x) = [(\alpha+1,\,n)/n!]\,\Psi_1(-n;\,1;\,-2n-\alpha-1/2,\,\alpha+1;\,2,\,x),$$

где через Ψ_1 обозначена вырожденная гипергеометрическая функция двух переменных:

$$\Psi_1(a;\,b;\,c,\,c';\,x,\,y) = \sum_{r,s}^{0\ldots\infty}\frac{(a,\,r+s)\,(b,\,r)}{(c,\,r)\,(c',\,s)\,r!\,s!}\,x^r y^s,$$

$$|x|+|y|<1,$$

автор устанавливает соотношения

$$G_{2n}(x) = (-2)^n n!\,\Psi_n^{(-1/2)}(x^2/2),$$

$$G_{2n+1}(x) = (-2)^n n!\cdot x\,\Psi_n^{(1/2)}(x^2/2).$$

Н. С. Кошляков

2288. Функции параболического цилиндра как пределы гипергеометрических функций. Тоскано (Le funzioni del cilindro parabolico come caso limite delle funzioni ipergeometriche. Toscano Letterio), Boll. Unione mat. ital., 1954, **9**, № 1, 29—38 (итал.)

Фельдгейм (Feldheim E., Atti Accad. Sci. Torino, 1941, **76**, 541—555) установил при произвольном k и $\nu \neq -1, -2, \ldots$ следующую формулу:

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{\Gamma(\omega^2+k+\nu+1)}{\omega^\nu\Gamma(\omega^2+k+1)}\times$$

$$\times\,{}_1F_1(-\nu;\,\omega^2+k+1;\quad\omega^2-\omega x) = e^{x^2/4}D_\nu(x),$$

где $D_\nu(x)$ — функция параболического цилиндра, ${}_1F_1(a;\,b;\,x)$ — вырожденная гипергеометрическая функция.

Автор указывает, что эта формула справедлива при произвольном ν. Далее автор устанавливает при произвольных ν, h и k следующую формулу:

$$\lim_{s\to\infty}\frac{\Gamma(s+\nu)}{s^{\nu/2}\,\Gamma(s)}\,{}_2F_1\left(-\nu,\;s+h+\nu,\;\frac{s+k+1}{2};\right.$$

$$\left.\frac{1-x/\sqrt{s}}{2}\right) = e^{x^2/4}\,D_\nu(x).$$

Эти формулы позволяют получить соответствующие предельные представления для функции $\exp(-x^2/2)\times$ $\times\,[h_n(x) + i\sqrt{\pi/2}\,H_n(x)]$, отличающейся лишь постоянным множителем от $D_{-n-1}(ix)$ ($H_n(x)$ — многочлен Эрмита, $h_n(x)$ — функция Эрмита 2-го рода), которым автор придает различные формы, используя функции Лагерра 2-го рода и ультрасферические функции 2-го рода. *М. Н. Олевский*

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

2289. Об интегральных представлениях действительных функций на положительной полуприямой. Обрешков (Über Integraldarstellungen reeller Funktionen auf der positiven Halbgeraden. Obreschkoff Nikola), Ber. Mathematiker-Tagung Berlin, 1953, 197—202 (нем.)

Сокращенный перевод с болгарского языка работы автора (РЖМат, 1954, 3757). В реферате имеется опечатка в формуле $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{2n}}{2\pi n^{\delta-1}\alpha^{n+1}}\,f_n\left(\frac{n^2}{\alpha}\right) = \varphi(\alpha)$: вместо e^{2n} напечатано e^{2^n}. *Б. М. Левитан*

2290. Характеристика преобразования Лапласа посредством относительного правила дифференцирования в пространствах L^p и U. Дёч (Caratterizzazione della trasformazione di Laplace mediante la relativa regola di derivazione negli spazi L^p e U. Doetsch Gustav), Atti Accad. naz. Lincei, Rend., Cl sci. fis., mat. e natur., 1954, **16**, № 4, 444—449 (итал.)

Пусть $F(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ — функция из некоторого функционального пространства $\mathcal{E}$, $F'(t)$ — ее производная. Продолжая исследования Леви (Levi E., тот же журнал, 1937, **24**, 422—426), Сан Хуана (San Juan R., Portugaliae Math., 1950, **9**, 177—184 и др.) и свои (Math. Nachr., 1951, **5**, 219—230), автор занимается вопросом о том, в каких случаях линейный функционал $\mathfrak{T}$ в $\mathcal{E}$, обладающий свойством

$$\mathfrak{T}\{F'\} = s\mathfrak{T}\{F\} - F(+0), \qquad (1)$$

(где s — комплексное число), будет совпадать с преобразованием Лапласа $\mathfrak{L}\{F\} = \int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$.

Рассматриваются два случая: $\mathcal{E} = L^p$ $(0,\,\infty)$ $(p \geqslant 1)$ и $\mathcal{E} = U$, где U — пространство функций $F(t)$, суммируемых в каждом конечном интервале $0 \leqslant t < T$ и имеющих конечный предел $\lim_{T\to\infty}\int_0^T F(t)dt$, при этом U нормировано: $\|F\| = \sup_{0\leqslant T<\infty}\left|\int_0^T F(t)\,dt\right|$. Доказывается теорема:

Пусть $\mathfrak{T}$ — линейный функционал в $\mathcal{E}$, удовлетворяющий условию (1) при некотором s, $\operatorname{Re} s > 0$, для последовательности функций

$$F(t) = \varphi_n(t) = e^{-t/2}\,t^n \in \mathcal{E}\ (n = 0,\,1,\ldots).$$

Тогда $\mathfrak{T} = \mathfrak{L}$ в пространстве $\mathcal{E}$. *М. К. Фаге*

2291. Некоторые теоремы из операционного исчисления. Чак (Some theorems in operational calculus — I. Chak A. M.), Ann. Univ. Lyon, Sec. A, 1953, № 16, 53—62 (англ.)

Преобразование Ганкеля определяется формулой

$$H_\mu\{\varphi(t)\} = \int_0^\infty \sqrt{xt}\, J_\mu(xt)\,\varphi(t)\,dt \quad (\mathrm{Re}\,\mu > 0).$$

Автор рассматривает операционные соотношения $f(t) \rightleftharpoons \Phi(p)$, $g(t) \rightleftharpoons \Psi(p)$ и доказывает теорему:

Если $x^{-n+1/2} g(x) = H_n\{t^{-n+1/2} f(t)\}$, то $x^{n-3/2} \times$

$\times \Psi(x) = H_{n-1}\{t^{n-3/2}\Phi(t)\}$.

Имеет место также обратная теорема. Особо доказываются соответствующие теоремы для частного случая $f(t) \equiv g(t)$. Даются также некоторые операционные соотношения и без доказательства приводятся некоторые теоремы, подобные указанной.

Примечание референта. Доказательства нельзя считать строгими, ибо не обосновано применение формулы Гольдстейна и выполнение обратного преобразования под знаком несобственного интеграла.

Э. Я. Риекстыньш

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

2292. Вычисление интегралов, встречающихся при некотором выборе приближенного выражения для волновой функции. Врёлан (Calcul des intégrales intervenant pour certaines formes approchées de la fonction d'onde. Vroelant Claude), C. r. Acad. sci., 1953, **236**, № 26, 2504—2506 (франц.)

Даются методы вычисления интегралов, встречающихся при изучении электронных систем молекулы, если приближенно взять волновую функцию в виде

$$\psi = \sum_k f_k(\ldots x, y_i, z_i, \ldots)\, e^{-g_k(\ldots x_i, y_i, z_i, \ldots)},$$

где f_k — многочлены; g_k — многочлены второй степени, у которых коэффициенты при x_i^2, y_i^2, z_i^2 равны между собой, а коэффициенты при x_iy_i, y_iz_i, z_ix_i равны нулю. Таким образом g_k имеет вид:

$$g_k = \sum_i \alpha_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) + \sum_{(i,j)} (\beta_{ij}^{(1)} x_i x_j + \beta_{ij}^{(2)} y_i y_j + \beta_{ij}^{(3)} z_i z_j) + \sum_{(i,j)} (\gamma_{i,j}^{(1)} x_i z_j + \gamma_{i,j}^{(2)} z_i x_j + \gamma_{i,j}^{(3)} x_i y_j).$$

В этом случае все интегралы, встречающиеся при определении энергии, легко вычисляются, за исключением интегралов вида $\int [\psi^2/r_{ij}]\,d\tau$ и $\int [\psi^2/r_{Ai}]\,d\tau$, где

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2};$$

$$r_{Ai} = \sqrt{(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 + (z_i - z_A)^2},$$

и интегрирование ведется по всем x_i, y_i, z_i, а x_A, y_A, z_A — координаты фиксированной точки.

Автор устанавливает, что оба интеграла сводятся к интегралам вида

$$\int \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma \exp(-x^2 - y^2 - z^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_A)^2}}\, dx\, dy\, dz$$

которые при помощи перехода к полярным координатам, интегрирования по полярным углам и затем интегрирования по частям приводятся к следующему интегралу: $\int_0^a \exp(-kr^2)\,dr$ (интеграл вероятностей), для которого составлены таблицы. *С. А. Гальперн*

2293. К вопросу об оптимальном режиме эксплуатации нефтяных месторождений. Салехов Г. С., Иванов Н. Ф., Докл. АН СССР, 1953, **89**, № 2, 237—239

Решается задача: требуется определить, с каким дебитом эксплуатировать скважину, чтобы, не снижая давления на ее забое ниже $P_{кр}$, получить за данное время ее эксплуатации t максимальную суммарную добычу.

Математически задача сводится к доказательству следующего утверждения:

Пусть имеет место неравенство

$$\int_0^t \frac{\overline{Q}(\tau)}{t - \tau} \exp\left(\frac{-a^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right) d\tau \geqslant \int_0^t \frac{Q(\tau)}{t-\tau} \times \exp\left(\frac{-a^2}{4\varkappa(t-\tau)}\right) d\tau,$$

где $\overline{Q}(\tau) \geqslant 0$, $Q(\tau) \geqslant 0$. Тогда $\int_0^t \overline{Q}(\tau)\,d\tau \geqslant \int_0^t Q(\tau)\,d\tau$.

Это утверждение устанавливается в предположении, что $\overline{Q}(\tau)$ и $Q(\tau)$ — ступенчатые функции.

В. Д. Чугунов

См. также: 2057, 2071, 2078, 2079, 2080, 2224, 2228, 2235, 2236, 2247, 2295

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

2294. О кольцах непрерывных функций. Уэрмер (On algebras of continuous functions. Wermer John), Proc. Amer. Math. Soc., 1953, **4**, № 6, 866—869 (англ.)

З. Л. Лейбензон (Успехи матем. наук, 1952, 7, № 2, 165) показал, что замкнутое подкольцо C' кольца C всех непрерывных функций $f(z)$ на окружности $|z| = 1$, содержащее все граничные значения функций, аналитических при $|z| < 1$ (и непрерывных при $|z| \leqslant 1$) (кольцо A) и, кроме того, функцию $f_0(z)$, вещественную или удовлетворяющую условию Липшица, совпадает со всем кольцом C. Усиливая этот результат, для всякого замкнутого подкольца $C' \subset C$ автор показывает, что из $C' \supset A$ вытекает $C' = A$ или $C' = C$. Основным средством является следующая лемма (Esseen C., Acta math., 1945—1946, 77—78, 19—21): если $d\mu(z)$ — комплексная мера на окружности $|z| = 1$, ортого-

нальная к z^n $(n = 0,1,2, \ldots)$, то существует функция $w(z)$, аналитическая при $|z| < 1$, имеющая суммируемые граничные значения $w(e^{i\varphi})$, и такая, что $d\mu(z) = w(z)\,dz$.

В условии и в утверждении теоремы можно заменить A на любое замкнутое подкольцо $B \subset C$, в котором имеется функция $\varphi_0(z)$, принимающая в различных точках окружности $|z| = 1$ различные значения. Как следствие получается теорема Рудина: Если M есть кольцо непрерывных функций в круге $|z| \leqslant 1$, содержащее аналитическую однолистную функцию, и каждая функция $\varphi(z) \in M$ достигает максимума модуля на границе, то $M \subset A$.

Г. Е. Шилов

2295. Об одном классе нормированных колец. **Уэрмер** (On a class of normed rings. Werner J.), Arkiv. mat., 1954, 2, № 6, 537—551 (англ.)

Рассматриваются нормированное кольцо L, составленное из функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, со сверткой в качестве умножения, и семейство $\overline{L}$ ограниченных измеримых функций $\varphi(x)$, $-\infty < x < \infty$, для которых интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$ существует при каждой $f \in L$. Предположения: 1) L содержит характеристические функции всех конечных интервалов; 2) норма функции $f(x)$ в L зависит только от $|f(x)|$; 3) если для измеримой функции $f(x)$ и любой $\psi \in \overline{L}$ $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\,|\psi(x)|\,dx < \infty$, то $f \in L$; 4) каждый ограниченный линейный функционал в L имеет вид $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\varphi(x)\,dx$, $\varphi \in \overline{L}$, и обратно, это выражение определяет линейный функционал на L при любой $\varphi \in \overline{L}$; 5) оператор сдвига $T_\tau f = f(x - \tau)$ ограничен в L при любом τ; 6) $\|f * g\| \leqslant k\,\|f\|\,\|g\|$, $k = \text{const}$.

Пример: $L = L^r_\sigma$, $\overline{L} = L^s_p$, где $r \geqslant 1$, $p(x) > 0$, $\sigma(x) = [p(x)]^{-s/r}$, $r^{-1} + s^{-1} = 1$; L^r_σ состоит из функций $f(x)$, для которых $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^r\,\sigma(x)\,dx = \|f\|^r < \infty$. Условия 1) — 4) здесь всегда выполняются, 5) выполняется, если $\sup\,[p(x - \tau)/p(x)] < \infty$ при каждом τ, 6) — если $\int_{-\infty}^{x} p(x - \tau)\,p(\tau)\,d\tau \leqslant kp(x)$, что имеет место, например, при $p(x) = 1/(1 + |x|^\alpha)$, $\alpha < 1$, или $p(x) = \exp(-|x|^\alpha)$, $0 < \alpha < 1$, и не имеет места при $p(x) = \exp(-|x|)$.

Теорема 1. Если $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \tau^2)^{-1} \ln \|T_\tau\|\,d\tau < +\infty$, то L содержит функцию $f(x) \not\equiv 0$, для которой преобразование Фурье $\hat{f}(s)$ обращается в нуль вне любого заданного интервала. Если $\|T_\tau\| \leqslant \sigma_1(\tau)$, где $\sigma_1(\tau) = \sigma_1(-\tau)$ и $\int_{-\infty}^{\infty} (1 + \tau^2)^{-1} \times \ln \sigma_1(\tau)\,d\tau < \infty$, то множество таких f плотно в L, для каждого идеала $I \neq L$ имеется точка s_0, где все $\hat{f}(s_0) = 0$ $(f \in I)$.

Теорема 2. Если выполнены только 1) — 4), $\sigma(\sigma)$ — четная, убывающая при $\sigma > 0$ функция, для которой $\int_0 \ln^+ h(\sigma) < \infty$, и если в L $\|e^{-\sigma|x|}\| \leqslant k e^{h(\sigma)}$, тогда для каждой $\varphi \in \overline{L}$ имеется непустой спектр S_φ (пересечение всех замкнутых множеств Λ на оси таких, что φ содержится в слабо замкнутой линейной оболочке L_Λ функций $e^{i\lambda x}$, $\lambda \in \Lambda$). Если множество S содержит внутри себя S_φ и ∞, то $\varphi \in L_S$.

Теорема 3. Если выполнены условия 1) — 6), $\|T_\tau\| = O(|\tau|^k)$ и $I \neq L$ — замкнутый примарный идеал, соответствующий точке s_0, то существует такое целое число $n \leqslant k$, что I содержит все $f \in L$, для которых $\hat{f}(s_0) = \hat{f}'(s_0) = \ldots = \hat{f}^{(n)}(s_0) = 0$.

Г. Е. Шилов

2296. О расположении значений вектор-функции. **Алексевич** (On the localization of values of vector valued functions. Alexiewicz A.), Roczn. Polskiego towarz. mat., 1952, **25**, 288—297 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Устанавливается связь между теоремами единственности аналитических функций и теоремами типа теоремы Витали о сходимости последовательности аналитических функций. Эти теоремы обобщаются на аналитические вектор-функции со значениями из пространства Банаха.

Пусть X — пространство Банаха, L — некоторое линейное многообразие в нем, т. е. множество, получаемое из подпространства путем сдвига, $\mathfrak{A}$ — класс функций, заданных на некотором множестве T, содержащий вместе с каждой функцией $\varphi(t)$ также любую функцию $\varphi(t) - \text{const}$.

Множество $A \subset T$ называется U-множеством для класса $\mathfrak{A}$, если всякая функция $\in \mathfrak{A}$, равная нулю на A, тождественно равна нулю.

Основной результат: Если вектор-функция $x(t)$ (принимающая значения из X) такова, что $\xi x(t) \in \mathfrak{A}$ для любого линейного функционала ξ на X, и $x(t) \in L$ для всех t из U-множества A, то $x(t) \in L$ при всех $t \in T$.

Выбирая различные X, L, $\mathfrak{A}$, A, автор получает различные теоремы единственности, теоремы типа Витали и ряд других теорем для вектор-функций.

Примечание референта. В тексте на стр. 294 $\lim^*$ определяется как предел при $\zeta \to e^{i\varphi}$ при условии ограниченности отношения $|e^{i\varphi} - |\zeta|| : |e^{i\varphi} - \zeta|$. Но это отношение при $\varphi \neq 0$ стремится к 0 при $\zeta \to e^{i\varphi}$ и потому всегда ограничено. Вместо этого отношения должно быть рассмотрено отношение $|e^{i\varphi} - \zeta| : |1 - |\zeta||$, ограниченность которого равносильна стремлению ζ к $e^{i\varphi}$ по некасательному направлению.

Ю. Л. Шмульян

2297. Теорема Радона — Никодима в кольцах операторов. **Пуканский** (The theorem of Radon — Nikodym in operator-rings. Pukánszky L.), Acta scient. math., 1954, **15**, № 2, 149—156 (англ.)

Дается новое изложение некоторых результатов Сегала (Segal I. E., Ann. Math., 1953, 57, 401—457) и Дая (Dye H. A., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 72, 243—280) при помощи теории следов в кольцах операторов, разработанной Диксмье (Dixmier J.,

Compositio math., 1952, 10, 1—55; РЖМат, 1953, 816).

Рассматривается слабо замкнутое кольцо $\mathbf{M}$ операторов гильбертова пространства $\mathfrak{H}$, в котором для каждого проекционного оператора $P \in \mathbf{M}$ существует финитный проекционный оператор $Q \in \mathbf{M}$, $Q \leqslant P$. Проекционный оператор $Q \in \mathbf{M}$ называется финитным, если $\mathbf{M}$ не содержит частично изометрических операторов, переводящих подпространство $Q\mathfrak{H}$ в его часть. Диксмье установил, что в этом случае существуют двусторонний идеал $\mathfrak{m}$ и положительный линейный функционал φ, определенный на $\mathfrak{m}$ и называемый следом, со следующими свойствами:

1. Для каждого $B \in \mathbf{M}$ и $A \in \mathfrak{m}$ $\varphi(AB) = \varphi(BA)$.

2. Если $A \subset \mathfrak{m}$ — точная верхняя грань (т. в. г.) вполне упорядоченного множества F положительных операторов из $\mathfrak{m}$, то $\varphi(A) = \text{т.в.г.}_{A' \in F} \varphi(A')$.

3. Если $\varphi(P) = 0$, где P — проекционный оператор из $\mathfrak{m}_2$, то $P = 0$.

4. Т.в.г. проекционных операторов из $\mathfrak{m}$ есть единичный оператор I.

5. φ — максимален, т. е. не может быть расширен на двусторонний идеал кольца $\mathbf{M}$, целиком содержащий $\mathfrak{m}$.

Проекционный оператор P называется σ-финитным, если любое семейство проекционных операторов $\{Q_\alpha\}$, для которых подпространства $Q_\alpha\mathfrak{H} \subset P\mathfrak{H}$ и все $Q_\alpha\mathfrak{H}$ ортогональны между собой, не более чем счетно. Кольцо $\mathbf{M}$ называется σ-финитным, если единичный оператор I является σ-финитным. Если $\mathbf{M}$ финитно (т. е. содержит только финитные проекционные операторы) и σ-финитно, то в качестве $\mathfrak{m}$ можно взять все $\mathbf{M}$.

Линейный положительный функционал ρ на кольце $\mathbf{M}$ называется абсолютно непрерывным относительно линейного положительного функционала $\tau (\rho \prec \tau)$, если для любого проекционного оператора $P \in \mathbf{M}$, из $\tau(P) = 0$, следует, что $\rho(P) = 0$.

Основные результаты:

Теорема I. Пусть φ — след, определенный на двустороннем идеале $\mathfrak{m}$ кольца $\mathbf{M}$. Тогда для каждого положительного функционала ρ на $\mathbf{M}$ можно найти такой (в общем случае неограниченный) оператор $H = \int_0^\infty \lambda dE_\alpha$, перестановочный со всеми операторами из $\mathbf{M}'$, что для любого $A \in M$

$$\rho(A) = \varphi(AH).$$

Если H не ограничен, то правая часть этого равенства определяется формулой $\varphi(AH) = \lim\limits_{\substack{\mu \to \infty \\ \varepsilon \to 0}} \varphi(AH_\varepsilon^\mu)$, где $H_\varepsilon^\mu = \int_\varepsilon^\mu \lambda\, dE_\lambda \in \mathfrak{m}$.

Теорема II. Пусть кольцо $\mathbf{M}$ финитно и σ-финитно, ρ и τ — два линейных положительных функционала на $\mathbf{M}$, и $\rho \prec \tau$. Тогда существует такой замкнутый оператор T, определенный на всюду плотном множестве в $\mathfrak{H}$, что для любого $A \in M$

$$\rho(A) = \tau(T^* AT).$$

Если T не ограничен и $T = WH$ — его разложение на унитарный W и самосопряженный $H = \int_0^\infty \lambda dE_\lambda$, то $\tau(T^*AT)$ определяется формулой $\tau(T^*AT) = \lim\limits_{n \to \infty} \tau(T_n^* AT_n)$, где $T_n = TE_n \in M$.

Г. М. Адельсон-Вельский

2298. Характеристика аналитических операций в вещественном пространстве Банаха. К у р ц в е й л ь (A characterization of analytic operations in real Banach spaces. K u r z w e i l J.), Studia math., 1953, 14, № 1, 82—83 (англ.)

Пусть X и Y — вещественные пространства Банаха, G — открытое множество пространства X и $F(x)$ $(x \in G)$ — операция, значения которой принадлежат пространству Y. Доказана следующая теорема:

Операция $F(x)$ аналитична в G тогда и только тогда, когда для каждого $x_0 \in G$ существует окрестность $U(x_0)$ элемента x_0, два числа C_{x_0}, q_{x_0} $(C_{x_0} > 0$, $0 < q_{x_0} < 1)$ и последовательность полиномов $P_n(x)$ степени n $(n = 1, 2, \ldots)$, удовлетворяющих условию

$$\| F(x) - P_n(x) \| \leqslant C_{x_0} (q_{x_0})^n$$
$$(x \in U(x_0);\ n = 1, 2, \ldots).$$

Реферируемая работа примыкает к статье Алексевича и Орлича (РЖМат, 1954, 4475). *М. С. Лившиц*

2299. Некоторые результаты в теории колец операторов. Г р и ф ф и н (Some contributions to the theory of rings of operators. G r i f f i n E r n e s t L., Jr), Trans. Amer. Math. Soc., 1953, 75, № 3, 471—504 (англ.)

Для слабо замкнутых колец M операторов в гильбертовом пространстве строится оператор C, обобщающий неймановскую константу C (определенную Нейманом только для факторов). Сначала такой оператор C строится для того случая, когда M, M' — кольца конечного класса. Далее это построение переносится на случай колец (называемых автором полуконечными (semifinite)) таких, что каждый отличный от нуля оператор проектирования из M содержит отличный от нуля конечный оператор проектирования. Для этого вводится понятие типа полуконечного кольца. Полуконечное кольцо M называется однородным типа S_α, если M конечно или M чисто бесконечно и в нем существует система $\{E_\beta\}$ мощности α взаимно ортогональных конечных эквивалентных операторов проектирования таких, что $\Sigma_\beta E_\beta = 1$. При этом кольцо M называется чисто бесконечным, если в центре M не существует конечных отличных от нуля операторов проектирования. Если, в частности, M — конечное кольцо, то $\alpha = 1$. Оказывается, что в центре всякого полуконечного кольца M существует система $\{P_\alpha\}$ взаимно ортогональных операторов проектирования P_α таких, что MP_α — кольцо типа α. Построив аналогичную систему $\{P'_\alpha\}$ для кольца M' (которое, как доказывается, также полуконечно), можно определить формальный оператор C, полагая

$$C = C_1 + \sum_{(\alpha, \alpha') \neq (1,1)} (\alpha / \alpha')\, P_{\alpha, \alpha'},\quad P_{\alpha, \alpha'} = P_\alpha P'_{\alpha'},$$

где C_1 есть оператор C в $MP_{1,1}$, $M'P_{1,1}$. Таким образом, задание C означает задание C_1 и тот факт, что $MP_{\alpha, \alpha'}$, $M'P_{\alpha, \alpha'}$ суть кольца типов S_α и $S_{\alpha'}$ соответственно. Далее рассматриваются счетноаддитивные положительные линейные функционалы $\omega(x)$ в слабо замкнутых кольцах.

Доказывается, что:

1) Если существует такой вектор z, что $[Mz]$ конечно и из $Az = 0$, $A \in M$ следует $\omega(A) = 0$

то существует вектор $x \in [Mz] \cap [M'z]$ такой, что $\omega(A) = (Ax, x)$ для всех $A \in M$.

2) Если (M, M') и $(\widetilde{M}, \widetilde{M}')$ — конечные кольца в H и H' с общими циклическими векторами z и $\widetilde{z}$ соответственно и если Φ есть $*$-изоморфизм M на $\widetilde{M}$, то существует изометрическое отображение W пространства H на $\widetilde{H}$ такое, что $\Phi(A) = WAW^{-1}$ для $A \in M$.

Основной результат состоит в следующем:

3) Если ω — счетноаддитивный положительный линейный функционал в конечном кольце M и оператор C ограничен, то существует конечное множество векторов $z_1, z_2, \ldots, z_n$ такое, что $\omega(A) = \sum_{k=1}^{n} (Az_k, z_k)$ для всех $A \in M$. Кроме того, известное отображение $A \to A^{\natural}$ конечного кольца M на его центр (Dixmier, Ann. École Norm., 1949, (3)66, 209—261) непрерывно в сильной (слабой) топологии тогда и только тогда, когда оператор C ограничен. Эти результаты применяются к выяснению условий, при которых $*$-изоморфизм между полуконечными кольцами задается изометрическим отображением пространств. Соответствующие результаты обобщают известные результаты Неймана (Neumann J. v., Ann. Math., 1943, 44, 716—808). Кроме того, автор доказывает, что всякий $*$-изоморфизм двух полуконечных колец непрерывен в сильнейшей топологии. В частности, след в конечном кольце есть непрерывная функция в сильнейшей топологии. В заключение полученные результаты применяются к одному классу колец, которые автор называет стандартными кольцами. *М. А. Наймарк*

2300. Об одной теореме Маутнера. Пукánszky (On a theorem of Mautner. Pukánszky L.), Acta scient. math., 1954, **15**, № 2, 145—148 (англ.)

Пусть $\mathfrak{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, являющееся континуальной прямой суммой пространств $\mathfrak{H}_\lambda$ $(-\infty < \lambda < \infty)$ с весовой функцией $\sigma(\lambda)$ (Neumann J. v., Ann. Math., 1949, 50, 401—485), и пусть задано семейство $\mathfrak{A}$ операторов A в $\mathfrak{H}$, разложимых в обобщенную прямую сумму $A \sim \{A(\lambda)\}$, обладающее следующим свойством: на вещественной оси существует не более чем счетная совокупность попарно непересекающихся множеств T_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, дополнение объединения которых есть множество σ-меры нуль и таких, что при $\lambda, \lambda' \in T_n$ существует изометрическое отображение $U(\lambda, \lambda')$ пространства $\mathfrak{H}_\lambda$ на $\mathfrak{H}_{\lambda'}$ такое, что $A(\lambda') = U(\lambda, \lambda') A(\lambda) U^{-1}(\lambda, \lambda')$ для всех $A \in \mathfrak{A}$.

Доказывается, что при этих условиях в $\mathfrak{H}$ существуют подпространство $\mathfrak{M}$, инвариантное относительно всех операторов $A \in \mathfrak{A}$, и изометрическое отображение U пространства $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{H}_{\lambda_0}$ $(\lambda_0 \in T_n$ при некотором $n)$ такое, что для всех $A \in \mathfrak{A}$, $A(\lambda_0) = UA_{(\mathfrak{M})}U^{-1}$, где $A_{(\mathfrak{M})}$ — сужение оператора A на $\mathfrak{M}$.

Этот результат является обобщением теоремы Маутнера (Mautner F. I., Ann. Math., 1950, 52, 528—555), в которой дополнительно предполагается, что почти все (в смысле меры σ) $\mathfrak{H}_\lambda$ неприводимы относительно операторов $A(\lambda)$, $A \sim \{A(\lambda)\} \in \mathfrak{A}$. *М. А. Наймарк*

2301. О максимальных нормальных операторах в полном сепарабельном гильбертовом пространстве. Понятие «места» и его свойства. Никодим (Sur les opérateurs normaux maximaux dans l'espace hilbertien séparable et complet. Notion de «lieu» et ses propriétés. Nikodým Otton Martin), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 13, 1373—1375 (франц.)

Рассматривается дистрибутивная структура (B), содержащая 0 и 1, в которой каждый элемент a обладает дополнением со a. Базой (B) называется подмножество $B_0 \subset B$ такое, что: $\alpha)$ $0, 1 \in B_0$; $\beta)$ из $a, b \in B_0$ следует $ab \in B_0$; $\gamma)$ всякий элемент из (B) есть сумма конечного числа элементов из B_0. Элементы базы B_0 называются кирпичами. Убывающей последовательностью (у. п.) называется бесконечная последовательность $\{a_n\} = (a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots)$ кирпичей; $\{a_n\} \leqslant \{b_n\}$ означает, что для всякого n существует m такое, что $a_n \leqslant b_m$. Две у. п. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ называются эквивалентными $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, если $\{a_n\} \leqslant \{b_n\}$ и $\{b_n\} \leqslant \{a_n\}$. У. п. $\{a_n\}$ называется минимальной, если из $\{b_n\} \leqslant \{a_n\}$ следует $\{b_n\} \sim \{0, 0, \ldots\}$ или $\{b_n\} \sim \{a_n\}$.

Местом называется всякий класс всех эквивалентных между собой минимальных у. п., каждая из которых называется представителем места.

Далее предполагается, что структура (B) включена в счетноаддитивную структуру $(\mathfrak{B})$, в которой каждый элемент также обладает дополнением, и что в $(\mathfrak{B})$ задана мера $\mu(e)$ такая, что из $\mu(e) = 0$ следует $e = 0$. Счетные суммы L кирпичей называются покрытиями. Кирпич a называется покрывающим B_0-место ξ, если существует представитель $a \geqslant a_1 \geqslant \ldots$ места ξ; покрытие L называется покрытием множества X мест, если для всякого $\xi \in X$ существует кирпич $a \subseteq L$, покрывающий ξ.

Внешней оберткой $[X]^*$ множества X называется произведение всех покрытий X, а внутренней оберткой $[X]_*$ — элемент $1 - [\mathrm{co}\, X]^*$, где $\mathrm{co}\, X = V - X$, а V — множество всех мест. Множество $[X]$ называется измеримым, если $[X]^* = [X]_*$, и $[X] = [X]^* = [X]_*$ называется его оберткой. При некоторых дополнительных предположениях это понятие измеримости обладает обычными свойствами, и можно ввести понятие измеримой функции $f(\xi)$, интеграла Фреше $\int f(\xi)\, d\mu$, функций с интегрируемым квадратом и т. д.

Автор указывает, что эти понятия применимы к нормальным операторам. *М. А. Наймарк*

2302. О максимальных нормальных операторах в полном сепарабельном гильбертовом пространстве. Каноническое представление. II. Никодим (Sur les opérateurs normaux maximaux dans l'espace hilbertien séparable et complet. Représentation canonique. II. Nikodým Otton Martin), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 14, 1467—1469 (франц.)

Результаты предыдущей заметки (см. реф. 2301) применяются к нормальным операторам. Пусть (F) — структура, кирпичами которой являются прямоугольники $R = R(\alpha, \beta; \alpha', \beta') = \{x + iy \mid \alpha < x \leqslant \beta, \alpha' < y \leqslant \beta'\}$ комплексной плоскости P. Каждая точка $z \in P$ определяет четыре места τ, называемые со-

седними (но имеются еще места на бесконечности), и z называется их вершиной.

Если N — нормальный оператор в гильбертовом пространстве, а $E(\Delta)$ — его спектральная функция, то каждому $f \in (F)$ отвечает подпространство $s(f) = E(f)\mathfrak{H}$ и совокупность всех $s(f)$ также образует структуру (S), которую автор называет спектральной структурой оператора N; соответствие $f \to s(f)$, таким образом установленное, распространяется до соответствия между борелевскими множествами $\alpha \in P$ и элементами борелевского расширения (S_b) структуры (S); (S_b) называется борелевской спектральной структурой оператора N. При некоторых естественных условиях на (S_b) в $\mathfrak{H}$ существует порождающий вектор $\omega \in \mathfrak{D}_N$; в этом случае можно построить изометрическое отображение $\mathfrak{H}$ на пространство всех измеримых функций $X(\sigma)$ места σ с интегрируемым квадратом по мере $\mu(a) = \| P_a \omega \|^2$, причем N переходит в оператор $\mathfrak{N}$, определенный формулой $\mathfrak{N}X(\sigma) = \lambda(\sigma)X(\sigma)$, где $\lambda(\sigma)$ — вершина места τ, отвечающего σ при построенном выше соответствии $f \to s(f)$. Указывается, как перейти от этой реализации оператора к обычной реализации $N\varphi(z) = z\varphi(z)$ в пространстве μ-измеримых функций $\varphi(z)$ с интегрируемым квадратом на P по мере μ.

Кроме того, автор рассматривает также тот случай, когда в $\mathfrak{H}$ не существует порождающего вектора ω, и получает в этом случае реализацию N в пространстве μ-измеримых функций $\varphi(p)$ с интегрируемым квадратом на объединении W многих экземпляров плоскости P; при этом $N\varphi(p) = z\varphi(p)$, где z — комплексное число, определяемое точкой $p \in W$.

Автор указывает, что эта реализация удобна для построения операторного исчисления для нормальных операторов и приводит к наглядному определению кратности непрерывного спектра. *М. А. Наймарк*

2303. Операторные алгебры типа I. Мисоноу (Operator algebras of type I. Misonou Yosinao), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 3, 87—90 (англ.)

Рассматриваются слабо замкнутые кольца $\mathfrak{A}$ операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (W^*-алгебры, по терминологии автора). Оператор проектирования P из $\mathfrak{A}$ ($P \neq 0$) называется абелевым, если кольцо $P\mathfrak{A}P$ коммутативно. W^*-алгебра называется алгеброй типа I, если всякое ее прямое слагаемое содержит абелев оператор проектирования; в силу леммы Цорна оно содержит тогда также максимальный абелев оператор проектирования. W^*-алгебра типа I называется алгеброй типа I_α (α — кардинальное число), если в $\mathfrak{A}$ существует семейство $\{P_\mu\}$ мощности α взаимно ортогональных максимальных абелевых операторов проектирования таких, что $\bigcup P_\mu = 1$; α не зависит от выбора такого семейства. Алгебра $\mathfrak{A}$ операторов в $\mathfrak{H}$ называется α-кратным повторением алгебры $\mathfrak{B}$ в H, если: 1) $\mathfrak{H}$ есть совокупность всех функций $f = \{f_s\}$, $s \in S$ (S — множество мощности α), таких, что $\Sigma_s \| f_s \|^2 < \infty$, причем $(f, g) = \Sigma_s (f_s, g_s)$. 2) $\mathfrak{A}$ есть совокупность всех операторов A вида $Af = \{Bf_s\}$, $B \in \mathfrak{B}$, W^*-алгебра называется алгеброй максимальной кратности α, если α есть наименьшая верхняя граница всех β, для которых существует β взаимно ортогональных операторов проектирования $P_\mu \in \mathfrak{A}'$ ($\mathfrak{A}'$ обозначает совокупность всех операторов, перестановочных со всеми операторами из $\mathfrak{A}$) таких, что операция сужения $\mathfrak{A}$ на $P_\mu \mathfrak{H}$ есть алгебраический изоморфизм; $\mathfrak{A}$ называется алгеброй равномерной кратности α, если для всякого отличного от нуля оператора проектирования из центра $\mathfrak{A}$ сужение $\mathfrak{A}$ на $E\mathfrak{H}$ имеет минимальную кратность α. В частности $\mathfrak{A}$ называется гиперприводимой, если она равномерной кратности 1; $\mathfrak{A}$ гиперприводима тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}'$ коммутативна. Доказывается, что:

1) если $\mathfrak{A}$ есть W^*-алгебра типа I_α, то $\mathfrak{A}'$ равномерной кратности α;

2) W^*-алгебра $\mathfrak{A}$ имеет тип I_α тогда и только тогда, когда $\mathfrak{A}'$ унитарно эквивалентна α-кр атному повторению гиперприводимой алгебры;

3) если E_α — взаимно ортогональные операторы проектирования из центра W^*-алгебры $\mathfrak{A}$ типа I, то $\mathfrak{A} = \Sigma \oplus E_\alpha \mathfrak{A}_\alpha = \Sigma \oplus E_\alpha \mathfrak{A}$ есть тогда и только тогда разложение алгебры $\mathfrak{A}$, в котором $\mathfrak{A}_\alpha$ есть алгебра типа I_α, когда $\mathfrak{A}' = \Sigma \oplus E_\alpha \mathfrak{A}' = \Sigma \oplus \mathfrak{A}'_\alpha$ есть разложение алгебры $\mathfrak{A}'$, в котором $\mathfrak{A}'_\alpha$ есть α-кратное повторение гиперприводимой алгебры;

4) если W^*-алгебры $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}'_1$ типа I_*-изоморфны W^*-алгебрам $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}'_2$ соответственно, то $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ унитарно эквивалентны. Последняя теорема является обобщением известного результата о факторах. *М. А. Наймарк*

2304. Гармонический анализ на локально компактных группах. I, II. Мацусита (Analyse harmonique dans les groupes localement compacts. I, II. Matsushita Shin-ichi), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 17, 955—957; № 18, 1056—1057 (франц.)

Пусть G — локально компактная группа, $L^2(G)$ — пространство функций с суммируемым квадратом, относительно левой меры Хаара dx, $d(x^{-1}) = \rho(x)dx$, $L(G)$ — пространство функций, суммируемых относительно dx. $L(G)$ является нормированным кольцом с инволюцией, причем $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\,\rho(x)$. $H(G)$ — множество функций f таких, что $f = f^*$. Пусть Π — множество линейных функционалов на $L(G)$, для которых $\varphi(f^*f) \geqslant 0$ и $\varphi(f^*) = \overline{\varphi(f)}$. Π можно рассматривать как часть $\hat{\Pi}$ пространства $\Gamma(H)$, сопряженного с H. Пространством характеров группы G называется множество $V_0 = (S_0 \cup 0)^\alpha - (0)$, где S_0 — множество экстремальных точек пересечения $\hat{\Pi}$ с единичной сферой E в $\Gamma(H)$, 0 — нулевой элемент в $\Gamma(H)$ и $(\cdot)^\alpha$ — замыкание $(\cdot)$. Обобщенным преобразованием Фурье функции f называется функция $\tilde{f}$, слабо непрерывная на V_0 и такая, что $\tilde{f}(\varphi) = \varphi(f)$, $f \in L(G)$.

V_0 локально компактно в слабой топологии и совпадает, в случае абелевой G, с группой характеров для G.

Для любого $\varphi \in V_0$ существует такая непрерывная положительно определенная функция ξ_φ, что $|\xi_\varphi(x)| \leqslant 1$ и $\tilde{f}(\varphi) = \int_G f(x)\,\overline{\xi_\varphi(x)}\,dx$.

Пусть $\varphi \in \Pi$. Множество всех $f(x)$, для которых $\varphi(g^* f) = 0$ при всех g из $L(G)$, обозначим через I_φ. I_φ является левым замкнутым идеалом в $L(G)$ и $L(G)/I_\varphi$ можно пополнить до гильбертова пространства относительно скалярного произведения $(X_f, X_g)_\varphi = \varphi(g^* f)$. Обозначим через $(B_C)_K$ комплексную оболочку множества непрерывных ограниченных на G функций, представимых в виде $f^* f$, где $f \in L(G)$. Тогда функционал π, определенный как $\pi(\tilde{f}) = f(e)$ для всех $f \in (B_C)_K$, порождает положительную меру Радона $d\varphi$ на V_0.

Прямая сумма $\Sigma \oplus L(G) \cap L^2(G)/I_\varphi$ может быть пополнена до гильбертова пространства H относительно скалярного произведения $(X_f, X_g)_H = \int_{V_0} (X_f, X_g)_\varphi \, d\varphi$, причем $\| X_f \|_H^2 = f^* f(e)$. H изометрично $L^2(G)$. Если обозначить изометрическое отображение $L^2(G)$ на H через P, то для любой функции f из $L^2(G)$

$$Pf(\varphi) = \text{l. i. m.} \int_G \overline{\xi_\varphi(x)} f^\lambda(x)\, dx,$$

где $f^\lambda \to f$. Указаны также формулы обращения, выражающие f через $\tilde{f}$. В G существует такое семейство $\{K_\lambda\}$ компактных множеств, что $\tilde{f}(\varphi) = \text{l. i. m.}_\lambda \int_{K_\lambda} \overline{\xi_\varphi(x)} f(x)\, dx$. Имеет место формула

$$\int_{V_0} \varphi_{\tilde{f}_0}(t)\, \tilde{f}^* g(\varphi)\, d\varphi = \int_G \overline{f(x)}\, \tilde{g}(x^{-1} t)\, dx,$$

обобщающая теорему о свертке. Здесь положено $\varphi_{\tilde{f}}(x) = \tilde{f}_{x^{-1}}(\varphi)/\tilde{f}(\varphi)$, если $\tilde{f}(\varphi) \neq 0$ и $= 1$ при $\tilde{f}(\varphi) = 0$; $f_x(\cdot) = f(x^{-1})$. Если группа G абелева, то указанные результаты переходят в известные результаты гармонического анализа на группах (Вейль А., Интегрирование в топологических группах и его применение, М., Изд-во иностр. лит-ры, 1950). *Н. Я. Виленкин*

2305. Доказательство спектральной теоремы. Сасаки (A proof of the spectral theorem. Sasaki Siro), Kumamoto J. Sci., 1953, **A1**, № 2, 14—16 (англ.)

В работе рассматривается в общей форме теорема о спектральном разложении неограниченных операторов. Пусть A — однородная коммутативная B^*-алгебра ограниченных линейных операторов в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$. Пусть $C(A)$ означает множество всех замкнутых операторов, которые коммутируют со всеми ограниченными операторами, коммутирующими с операторами из A. Пусть Ω — компактное хаусдорфово пространство мультипликативных непрерывных линейных функционалов на A (Ω называется спектром A). Основная теорема состоит в том, что если $U \in C(A)$ и область определения U всюду плотна в $\mathfrak{H}$, то существует измеримая функция $f(\chi)$, определенная на Ω, такая, что $(Ux, y) = \int_\Omega f(\chi)\, d\mu_{x,y}(\chi)$ для любого $x \in D(U)$ и любого $y \in \mathfrak{H}$. Через $\mu_{x,y}(\chi)$ обозначена мера на Ω такая, что для любого $T \in A$, $(Tx, y) = \int_\Omega \chi(T)\, d\mu_{x,y}(\chi)$. Доказательство связано с нахождением элемента $x \in D(U)$ такого, что для любого $y \in \mathfrak{H}$ $\mu_{y,y}$ является абсолютно непрерывной функцией по мере $\mu_{x,x}$. При этом используется сепарабельность $\mathfrak{H}$, однако доказательство существования указанного элемента x предоставляется читателю. Предположим теперь, что U — неограниченный самосопряженный оператор. Пусть A — максимальная коммутативная B^*-алгебра, коммутирующая с U. Утверждается, что $U \in C(A)$; и, следовательно, предыдущая теорема применима для получения спектрального разложения для U; далее указывается, что $\mu_{x,y}(\chi)$ имеет в этом случае вид $(E(\chi)x, y)$. В работе не содержится ни доказательства этой теоремы, ни пояснений к ней. Это, по мнению референта, достойно сожаления. *A. E. Taylor*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 3, 236.

2306. О методе Чебышева для функциональных уравнений. Нечепуренко М. И., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2(60), 163—170

На нелинейные функциональные уравнения обобщается один из методов решения алгебраических и трансцендентных уравнений — метод разложения в быстро сходящийся ряд П. Л. Чебышева. Дается аналог алгоритма Чебышева для банаховых пространств, а именно

$$x_{n+1} = x_n - \Gamma_n \varphi(x_n) - \frac{1}{2} \Gamma_n \varphi''(x_n)\, [\Gamma_n \varphi(x_n)]^2, \quad (1)$$

где $\varphi(x) = 0$ — нелинейное функциональное уравнение. Если $\varphi(x)$ — дважды дифференцируемый в смысле Фреше оператор, переводящий элементы банахова пространства X в элементы банахова пространства Y, то имеет место теорема:

Если 1) для оператора $\varphi'(x_0)$ имеется обратный Γ_0 и при этом $\| \Gamma_0 \| \leqslant B_0$; 2) элемент x_0 приближенно удовлетворяет (1): $\| \Gamma_0 \varphi(x_0) \| \leqslant \eta_0$; 3) $\| \varphi''(x) \| \leqslant K$ в используемой области, определяемой неравенством (3); 4) $B_0 \eta_0 K = h_0 \leqslant \sqrt{3/2} - 1$; 5) $g_0 = h_0(1 + h_0/2)$ (на основании 4) $g_0 \leqslant 1/4$), то уравнение (1) имеет решение x^*, которое может быть найдено при помощи алгоритма Чебышева. Быстроту сходимости можно оценить неравенством

$$\| x_n - x^* \| < 4\,(0{,}75)^n\, (\theta g_0)^{2n-1}\, (1 + h_0/2)\, \eta_0, \quad (2)$$

где $\theta = 256/81$.

По теореме, доказанной Л. В. Канторовичем, решение x^* уравнения (1) существует и единственно в области

$$\| x - x_0 \| < (1 + \sqrt{1 - 2h_0})\, \eta_0/h_0,$$

причем

$$\| x_0 - x^* \| \leqslant (1 - \sqrt{1 - 2h_0})\, \eta_0/h_0. \quad (3)$$

Дается применение алгоритмов Ньютона и Чебышева к обыкновенным дифференциальным уравнениям первого порядка. *М. А. Мертвецова*

2307. Вогнутые модули. Накано (Concave modulars. Nakano Hidegoro), J. Math. Soc. Japan, 1953, **5**, № 1, 29—49 (англ.)

Автор изучает обобщение R (abstraction R) пространства L^p, $0 < p < 1$. R определяется как σ-ус-

ловно полная векторная структура с неотрицательной функцией $m(x)$, предназначенной обобщить $\int |x(t)|^p dt$ в L^p, $0 < p < 1$. Постулаты на $m(x)$: $m(x) \leqslant m(y)$, если $|x| \leqslant |y|$; $m(x+y) = m(x) + m(y)$, если $x \cap y = 0$; при каждом фиксированном x функция $m(tx)$ вогнута при $t \geqslant 0$ и $m(tx) \to 0$ при $t \to 0$; если $0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots$ и $m(x_n)$ ограничена, то должен существовать такой элемент x, что $x = \sup x_n$ и $m(x) = \sup m(x_n)$; $m(x) > 0$ для всех $x \neq 0$. Среди прочих результатов автор показывает, что R обладает тем свойством, что для любой системы $0 < x_\lambda$ существует счетное подмножество x_n такое, что $\Lambda_\lambda x_\lambda = \Lambda_n x_n$, и значит R обязательно условно полно. Существует единственное разложение R на ортогональные нормальные многообразия F и S такое, что при $t \to \infty$ $\lim m(tx)/t > 0$ для каждого $x \neq 0$ в F и $= 0$ для каждого x в S; если $R = S$ и R не содержит дискретных элементов, то единственный линейный ограниченный функционал на R есть нулевой функционал; последний результат был получен ранее Дейем (Day M. M., Bull. Amer. Math. Soc., 1940, **46**, 816—823) и Сирвинтом (Докл. АН СССР, 1940, **26**, 119—122) для частного случая L^p, $0 < p < 1$. *I. Halperin*

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 5, 442.

2308. К доказательству обобщенной теоремы о неподвижных точках. Никаидо (Zum Beweis der Verallgemeinerung des Fixpunktsatzes. Nikaidô Hukukane), Kōdai Math. Sem. Repts, 1953, № 1, 13—16 (нем.)

Новое доказательство теоремы А. Н. Тихонова о существовании неподвижной точки при непрерывном отображении выпуклого бикомпактного подмножества X локально выпуклого линейного топологического пространства L в себя и следующего обобщения этой теоремы, принадлежащего Фань Цюю (Fan K., Proc. Nat. Acad. Sci., 1952, 38, № 2, 121—126): для каждого полунепрерывного сверху отображения $f(x)$ множества X в семейство его замкнутых выпуклых подмножеств существует точка $x \in X$, содержащаяся в своем образе $f(x)$. При этом $f(x)$ полунепрерывно сверху, если для каждого открытого множества $O \supset f(x)$ существует окрестность W_x точки x такая, что $f(W_x) \subset O$. Доказательства опираются на теорему о преобразуемости множества X с помощью произвольно малых непрерывных деформаций в конечномерные евклидовы компакты, установленную П. С. Александровым для случая, когда L есть сепарабельное гильбертово пространство, и перенесенную Хукухара (Hukuhara M., Japan. J. Math., 1950, **20**, 1—4) на произвольные локально выпуклые L; дано новое доказательство и этой теоремы.

Д. А. Райков

2309. Эргодическая теорема в выпукло-компактном банаховом пространстве. Кротков, Гальперин (The ergodic theorem for Banach spaces with convex-compactness. Krotkov Valentina, Halperin Israel). Trans. Roy. Soc. Canada, Sec. III, 1953, **47**, June, 17—20 (англ.)

Банахово пространство B называется выпукло-компактным, если всякая последовательность вложенных друг в друга непустых, ограниченных, выпуклых и замкнутых множеств B имеет непустое пересечение.

Теорема. Если B выпукло-компактно и ограниченный линейный оператор T удовлетворяет условиям:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \| T^n/n \| = 0$ для каждого $f \in B$,

2) $\| T_n \| \leqslant K$ для всех n и некоторого $K < \infty$,

где $T_n = (1 + T + \ldots + T^n)/(n+1)$, то оператор T эргодичен в B, т. е. для каждого $f \in B$ существует $f^* \in B$ такой, что $\lim\limits_{n\to\infty} \| T_n f - f^* \| = 0$.

Этот результат, как отмечают авторы, просто вытекает из рассуждений, приводимых Ф. Риссом при доказательстве эргодической теоремы (Riesz F., J. London Math. Soc., 1938, **13**, 274—278). Отмечается, что указанная теорема верна для рефлективных пространств Банаха. Этот вывод авторы делают ввиду приводимых ими соображений, в силу которых рефлективное пространство является выпукло-компактным; отсутствует ссылка на работу В. Л. Шмульяна, которому принадлежит этот результат (Шмульян В. Л., Матем. сб., 1939, **6** (48), 77—94). Авторы замечают, что установленная ими теорема верна и для равномерно выпуклых (по Кларксону) пространств Банаха. Этот вывод делается на основании теоремы референта о том, что равномерно выпуклое пространство рефлективно; при этом авторы дают доказательство этой теоремы, совпадающее с доказательством референта (Докл. АН СССР, 1938, **20**, 243—246). Ссылку авторы не приводят.

Введение термина выпукло-компактное пространство Банаха не оправдано, ибо класс выпукло-компактных пространств совпадает с классом рефлективных пространств. *Д. П. Мильман*

2310. Расходящийся ряд в промежуточном представлении. Петерман (Une série divergente en représentation intermédiaire. Petermann A.), Helv. phys. acta, 1953, **26**, № 7—8, 731—742 (франц.; резюме англ.)

В работе продолжаются исследования Херста (Hurst, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1952, **48**, 625), Тирринга (Thirring W., Helv. phys. acta, 1953, **26**, 33) и автора (Arch. Sci. Genève, 1953, **6**, 5), изучавших проблему сходимости разложений теории возмущений для случая одного скалярного поля Ф, взаимодействующего с самим собой по закону Φ^3. В указанных работах применялось представление взаимодействия и доказывалась расходимость разложений теории возмущений.

В данной работе изучается случай взаимодействия Φ^1 и доказывается, что разложения теории возмущений с учетом вкладов, происходящих только от неприводимых диаграмм (следовательно, без учета перенормировки констант), расходятся не только в представлении взаимодействия, но и в промежуточном представлении, которое было введено Дайсоном (Dyson F. J., Phys. Rev., 1951, **83**, 608).

Из полученного результата, а также из результата Гамильтона (Hamilton J., Proc. Cambrige Philos. Soc., 1953, **49**, 642), утверждавшего, что промежуточное представление в случае взаимодействия Φ^3 приводит к сходящимся разложениям, автор пытается делать некоторые обобщающие выводы относительно связи между сходимостью разложений теории возмущений и свойствами перенормировки полей.

Однако эти рассуждения основаны на недоразумении, ибо, как показал Дайсон (Dyson F. J., Math.

Revs, 1954, **15**, 186), работа Гамильтона является ошибочной.

Как отмечает автор, основные вычисления и оценки реферируемой работы опираются на цитированную выше его работу. *О. С. Парасюк*

2311 К. Математические вопросы квантовой теории полей. Фридрихс (Mathematical aspects of the quantum theory of fields. Friedrichs K. O., 272 pp., New York, Interscience Publishers, Inc, London, Interscience Publishers, Ltd., 1953) (англ.)

Книга представляет собой напечатанную вновь статью под тем же названием, опубликованную ранее в виде пяти отдельных частей в Communs Pure and Appl. Math. за 1951—1953 гг. и посвященную строгому математическому изложению квантовой теории полей.

Книга состоит из введения и пяти частей. В кратком введении дано очень ясное и четкое изложение основных понятий, связанных со спектральным разложением оператора, и системы конечного числа попарно перестановочных операторов.

Часть I посвящена краткому изложению основ квантовой электродинамики в обычной форме. Автор указывает, что при этом операторы, характеризующие поле, являются несобственными операторами, так что операторами в обычном смысле являются их интегралы. Точнее, операторы, характеризующие поле, следует рассматривать как функционалы (аналогичные распределениям Л. Шварца), определенные на некотором классе функций, причем значениями этих функционалов являются не числа, а операторы; автор указывает на связь такой трактовки с задачей спектрального разложения бесконечного множества перестановочных между собой операторов.

В части II автор переходит к строгому изложению квантовой теории полей, в первую очередь метода вторичного квантования, который, в изложении автора, состоит в следующем. Если состояние одной частицы описывается при помощи функций $\psi(s)$ ($s=(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, σ_k — числа) с интегрируемым квадратом относительно некоторой меры $dm(s)$, то состояния поля описываются при помощи гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ систем функций

$$\psi = \{\psi_0, \psi_1(s_1), \psi_2(s_1, s_2), \ldots\}, \quad \psi_0 = \text{const}, \qquad (1)$$

таких, что

$$|\psi_0|^2 + \int |\psi_1(s_1)|^2 dm(s_1) + \int |\psi_2(s_1, s_2)|^2 dm(s_1)\, dm(s_2) + \ldots < \infty. \qquad (2)$$

Система $\psi = \{0, \ldots, \psi_n(s_1, \ldots, s_n), 0, \ldots\}$ описывает состояние, в котором поле состоит из n частиц, в частности, система $\psi = \{\psi_0, 0, 0, \ldots\}$ описывает состояние вакуума; в случае же состояния, отвечающего произвольной системе ψ, число частиц остается неопределенным.

Описание состояний поля при помощи систем (1) автор называет корпускулярным представлением (particle representation).

Если Λ^s — оператор, отвечающий одной частице в s-представлении, то оператор $[\Lambda^s]$, описывающий ту же величину в поле, определяется следующим образом:

1) если $\psi_k = 0$ при $k \neq 0$, то $[\Lambda^s]\psi = 0$;

2) если $\psi_k = 0$ при $k \neq n$, $\psi_n = \psi_1(s_1) \ldots \psi_n(s_n)$ и $\psi_i(s_i)$ принадлежит области определения оператора Λ^s, то $[\Lambda^s]\psi = \psi'$, где $\psi'_k = 0$ при $k \neq n$ и $\psi'_n = \Lambda^s \psi_1(s_1) \cdot \psi_2(s_2) \ldots \psi_n(s_n) + \ldots + \psi_1(s_1) \ldots \psi_{n-1}(s_{n-1}) \Lambda^s \psi_n(s_n)$;

3) $[\Lambda^s]$ продолжается далее линейным образом на конечные линейные комбинации элементов ψ типа 1) и 2) и затем замыкается.

В частности, из единичного оператора 1 путем вторичного квантования получается оператор $N = [1]$ числа частиц, для которого $\psi = \{0, \ldots, \psi_m, 0, \ldots\}$ есть собственный вектор с собственным значением m.

При таком способе описания поля формулы для операторов аннигиляции $A^-(s)$ и рождения $A^+(s)$ принимают простой вид; например

$$A^-(s')\{\psi_0, \psi_1(s_1), \psi_2(s_1, s_2), \ldots\} = \{\psi_1(s'), 2^{1/2}\psi_2(s_1, s'), 3^{1/2}\psi_3(s_1, s_2, s') \ldots\}.$$

Отсюда видно, что $A^-(s')$, $A^+(s')$ являются несобственными операторами, а операторами в собственном смысле являются $A^-\{\bar{g}\} = \int \overline{g(s')}\, A^-(s')\, dm(s')$ и $A^+(\bar{g}) = \int \overline{g(s')}\, A^+(s')\, dm(s')$.

Например,

$$A^-\{\bar{g}\}\{\psi_0, \bar{\psi}_1(s_1), \psi_2(s_1, s_2), \ldots\} = \{\int \psi_1(s')\overline{g(s')}\, dm(s'), 2^{1/2}\int \psi_2(s_1, s') \times \overline{g(s')}\, dm(s'), \ldots\}.$$

Простую трактовку получает также рассмотрение полей Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака. Первый случай означает выделение в $\mathfrak{H}$ подпространства элементов ψ с симметрическими компонентами ψ_n, а второй — подпространства элементов ψ с антисимметрическими компонентами. При этом определения операторов рождения и аннигиляции естественным образом видоизменяются, и для них весьма просто получаются перестановочные соотношения как в случае поля Бозе — Эйнштейна, так и Ферми — Дирака.

Следует отметить, что по существу та же идея описания вторичного квантования и полей Бозе — Эйнштейна и Ферми — Дирака была раньше изложена в статье П. К. Рашевского (Тр. Семинара по векторн. и тензорн. анализу Н.-и. ин-та матем. при МГУ, 1949, **7**, 362—380).

Автор получает интегральное представление оператора энергии поля $[\Omega]$, обобщающее обычное описание поля (заключенного в ящик) при помощи осцилляторов на случай произвольного (не обязательно дискретного) спектра.

Автор дает также другое описание процесса вторичного квантования при помощи следа и показывает эквивалентность обоих процессов вторичного квантования.

В заключение части II дается еще один способ описания полей, а именно при помощи некоторых функционалов $f(\eta)$ в гильбертовом пространстве вещественных функций $\eta(s)$ таких, что $\int [\eta(s)]^2 dm(s) < \infty$. Эти функционалы имеют вид $f(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} I e_n(\eta)$, где $I e_n(\eta) = (n!)^{-1/2} H e_n(\eta) \exp(-(\eta, \eta)/4)$

а $He_n(\eta)$ — функционалы, аналогичные полиномам Эрмита. При таком описании операторы рождения и аннигиляции определяются формулой $A^{\pm}(s')f(\eta) = \left[\frac{1}{2}\eta(s') \mp \frac{\delta}{\delta(s')}\right] f(\eta')$; простые формулы получаются также для других операторов, характеризующих поле. В связи с этим описанием возникает интересная задача определения интеграла по гильбертовому пространству. Автор указывает, что для квантовой теории полей наиболее удобным является корпускулярное представление.

В части III рассматриваются поля Бозе — Эйнштейна при наличии внешних зарядов. Несобственная операторная функция Ξ, характеризующая поле, удовлетворяет тогда уравнению

$$\nabla_t^2 \Xi + (\mu^2 - \nabla_x^2)\Xi = j, \qquad (3)$$

где $\nabla_t = \partial/\partial t$, $\nabla_x = \mathrm{grad}$, μ — масса покоя, а j характеризует распределение внешних зарядов. Сначала рассматривается тот случай, когда j не зависит от t; уравнение (3) преобразуется в уравнения для операторов рождения и аннигиляции, решения которых пишутся затем в явном виде. Отсюда получаются выражения для операторов: числа частиц, внутренней энергии и энергии взаимодействия; в частности, получаются пределы математических ожиданий этих величин в фиксированном состоянии при $t \to \infty$. В этой связи выясняются условия, при которых имеет или не имеет место инфракрасная катастрофа.

При решении уравнения (3) автор вводит операторы

$$B^{+}(s,t) = A^{+}(s,t) - q^{+}(s),\ B^{-}(s,t) = A^{-}(s,t) - q^{-}(s), \qquad (4)$$

где $q^{\pm}(s) = [\Omega]^{-1}[2\Omega]^{-1/2} j_b^{\pm}(s)$, $j^{-}(s)$ — функция преобразованная j к общей квантовой переменной s, а $j^{+}(s)$ — преобразование комплексно-сопряженной функции $\bar{j}$.

Оказывается, что операторы $B^{\pm}(s,t)$ удовлетворяют тем же перестановочным соотношениям, что и операторы рождения и аннигиляции $A^{\pm}(s,t)$, а оператор $M(t) = \int B^{+}(s,t)\,B^{-}(s,t)\,dm(s)$ обладает свойствами оператора N числа частиц. Операторы $B^{\pm}(s,t)$ и $M(t)$ автор называет модифицированными операторами рождения, аннигиляции и числа частиц. Собственные функции χ_n оператора $M(t)$ определяют состояния с определенным числом модифицированных частиц и произвольное состояние поля можно представить при помощи этих собственных функций в виде

$$\{\chi_0, \chi_0(s_1), \chi_0(s_1, s_2), \ldots\}, \qquad (5)$$

аналогичном (1).

Автор дает различные выражения для унитарного оператора, осуществляющего переход от представления (1) к представлению (5), при помощи которых решается ряд важных задач, в частности получаются формулы для вероятности $P(M, m \mid N, n)$ того, что будет m модифицированных частиц непосредственно после обнаружения n немодифицированных частиц, для вероятности $P(N(t), n \mid N(0), n_0)$ и ее предела при $t \to \infty$.

Полученные результаты распространяются далее на случай источника, зависящего от времени, причем особое внимание уделено точной трактовке и исследованию случаев включения и выключения источника, в частности бесконечно медленному включению и выключению. Дается также лоренц-инвариантная формулировка полученных результатов.

Часть IV посвящена описанию состояний поля при помощи чисел заполнения. При этом, в отличие от обычной трактовки, допускается случай непрерывных квантовых переменных s. Таким образом, в трактовке автора основную роль играет величина $N(s)$ (число частиц, для которых величина $S = s$) и возможные значения $\nu(s)$ величины $N(s)$, причем функция $\nu(s)$ принимает, конечно, только целочисленные значения.

Состояния поля описываются при помощи элементов гильбертова пространства, которое строится следующим образом: в пространстве F функционалов $f(\nu)$ вводится некоторое скалярное произведение, по которому затем F пополняется. Автор выводит формулы перехода от этого представления к корпускулярному и обратно, а также формулы для основных операторов (операторов рождения и аннигиляции, числа частиц и т. д.) в представлении при помощи чисел заполнения. При этом оказывается, что, изменив несколько определение скалярного произведения в пространстве функционалов $f(\nu)$ путем введения весового множителя, можно построить класс полей, называемых автором мириотичными (myriotic), в которых не существует оператора числа частиц и для которых, следовательно, не существует корпускулярного представления; в частности, в таких полях нет вакуумных состояний, но есть состояние, в котором число частиц равномерно распределено и которое автор называет состоянием равного распределения. Это состояние играет роль, аналогичную вакуумному состоянию для обычных полей.

Заключительная часть главы посвящена выводу формул для математических ожиданий различных величин в состоянии равного распределения и перенесению теории на поля Ферми—Дирака.

В части V изучаются поля под действием внешних сил, линейных и однородных относительно потенциала поля (РЖМат, 1954, 2248).

М. А. Наймарк

См. также: 2055, 2057, 2113, 2122, 2208, 2290, 2320.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

2312. Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения. **Скитович В. П.**, Изв. АН СССР, сер. матем., 1954, 18, № 2, 185—200

Обобщаются результаты С. Н. Бернштейна и Б. В. Гнеденко (Изв. АН СССР, сер. матем., 1948, 12, 97—100) о стохастически независимых линейных формах.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — независимые случайные величины; составим m $(2 \leqslant m \leqslant n)$ линейных форм $l_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ki} X_i$ $(k = 1, \ldots, m)$.

Доказывается, что величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ будут распределены нормально, если: (А) формы $l_1, l_2, \ldots, l_m$ независимы в совокупности, (В) матрица, составленная из коэффициентов форм l_k, содержит в каждом столбце по крайней мере два элемента, отличных от нуля. Обратно, если независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ распределены нормально, то в линейных формах $l_1, l_2, \ldots, l_m$ можно выбрать коэффициенты a_{ik} так, чтобы эти формы были независимы в совокупности.

Если в прямой теореме требование (В) опустить, то нормально распределенными будут те из величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$, которые встречаются не менее, чем в двух различных формах.

Далее эти результаты переносятся на линейные формы независимых векторов. В качестве следствия устанавливается теорема: Пусть в пространстве R_N имеется невырожденное распределение вероятностей. Для того чтобы это распределение было нормальным, необходимо и достаточно, чтобы: а) в пространстве R_N можно было выбрать такую систему координат, в которой проекции распределения на оси были бы независимыми, б) можно выбрать еще две оси, не лежащие ни в одной из координатных гиперплоскостей, проекции распределения на которые также независимы.

В качестве применения полученных результатов дается вывод закона Максвелла для распределения скоростей молекул при единственной гипотезе: существуют две системы ортогональных осей, причем ни одна ось одной системы не совпадает с осями другой, и такие, что проекции скорости молекулы на оси каждой системы независимы.

Аналогично, при менее ограничительных предположениях, выводится закон эллипсоидального распределения звездных скоростей. *А. А. Бобров*

2313. Явная формула устойчивого закона распределения. Чжао Чжун-чжэ (穩定性分佈律的顯明公式. 趙仲哲), 數學學報 (Шусюэ сюэбао, 1953, **3**, № 3, 177—185 (кит.; резюме англ.) англ.)

Рассматривается класс устойчивых законов с характеристическими функциями

$$f(t) = \exp\{-(c_0 - ic_1 \operatorname{sgn} t)\,|\,t\,|^{\alpha}\},$$

$$0 < \alpha < 2,\ c_0 > 0,\ |\,c_1\,| \leqslant c_0 \left|\operatorname{tg}\frac{\pi\alpha}{2}\right|.$$

Не предполагая априори, что $f(t)$ представляет характеристическую функцию, но удерживая предположения: $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ и $c_0 > 0$, автор находит разложения в ряды и асимптотические представления преобразования Фурье $p(x)$ функции $f(t)$ и ее интеграла $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)\,dy$. Суммируемость $p(x)$, которая автоматически получается при теоретико-вероятностной трактовке, в данном случае обосновывается в ходе доказательства.

Полагая $c = (c_0^2 + c_1^2)^{1/2}$, $\omega = \operatorname{arctg}\frac{c_1}{c_0}$, $|\,\omega\,| < \pi/2$,

$$\varphi = \pi\alpha/2 + \omega \operatorname{sgn} x,\ \psi = \pi/2 - \omega/\alpha,$$

$$\mu_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n!}\, c^n \Gamma(n\alpha + 1),$$

$$\mu_n' = \frac{1}{n!}\, c^{-(n+1)/\alpha}\, \Gamma\left(\frac{n+1}{\alpha}\right),$$

$$S_N = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \mu_n\,|\,x\,|^{-(n\alpha+1)} \sin n\varphi,$$

$$S_N' = \frac{1}{\pi\alpha} \sum_{n=1}^{N} \mu_n' x^n \sin(n+1)\psi,$$

$$R_N = \frac{\theta}{\pi\alpha\,(N+1)!}\, \Gamma\left(\frac{N+2}{\alpha}\right) c_0^{-(N+2)/\alpha}\,|\,x\,|^{N+1},\ |\theta| < 1,$$

$$R_N' = \frac{\theta' \Gamma(\alpha(N+1)+1)\, c^{N+1}}{\pi\,(N+1)!\,|\,x\,|^{\alpha(N+1)+1}} \times$$

$$\times \left\{\sin\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\pi}{2} + \omega \operatorname{sgn} x\right)\right\}^{-\alpha(N+1)-1},$$

имеем:

1. При $0 < \alpha < 1$ $p(x) = \lim_{N\to\infty} S_N(x)$, $x \neq 0$, $p(x) = S_N' + R_N$.

2. При $\alpha > 1$ $p(x) = \lim_{N\to\infty} S_N'(x)$, $p(x) = S_N + R_N'$.

Кроме того, автор получает аналогичные ряды и асимптотические выражения для $F(x)$, причем оказывается: $F(0) = 1/2 - \omega/\pi\alpha$. В теоретико-вероятностном случае они были ранее получены в работах Бергстрема (Bergström H., Arkiv mat., 1952, **2**, 375—378). *Н. В. Смирнов*

2314. Предельные распределения сумм произвольных, независимых, одинаково распределенных r-точечных ($r \geqslant 2$) случайных переменных. Фиш М., Бюл. Польск. АН, Отд. 3, 1953, **1**, № 6, 231—234

Автор называет случайную величину r-точечной, если она может принимать не более r различных значений. Рассматривается последовательность сумм

$$X_n = Y_{n1} + Y_{n2} + \ldots + Y_{nn},\ n = 1, 2, \ldots,$$

r-точечных ($r \geqslant 2$ фиксировано) случайных величин Y_{nk} $(1 \leqslant k \leqslant n,\ n = 1, 2, \ldots)$. В каждой сумме слагаемые Y_{nk} взаимно независимы и одинаково распределены. Исследуются возможные предельные типы распределений для величин $a_n X_n + b_n$, где $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — какие-то числовые последовательности.

Теорема. Если распределение величины $a_n X_n + b_n$ при $n \to \infty$ слабо сходится к распределению, отличному от несобственного, то это предельное распределение является композицией s распределений Пуассона и v нормальных распределений, где $v = 0$ или 1, $s + v \leqslant r - 1$.

Для $r = 2$ фактически равносильный (формально более слабый) результат был получен в свое время П. А. Козуляевым (Уч. зап. МГУ, 1939, **15**, 179—

182). Приводится также ряд аналогичных теорем более узкого характера, в том числе достаточные условия сходимости распределений величин $(X_n - MX_n)/\sqrt{DX_n}$ к нормальному распределению и к композиции распределений Пуассона. Теоремы формулируются без доказательств.

Примечание референта. Теоремы Фиша могут быть получены из необходимых и достаточных условий сходимости распределений сумм независимых бесконечно малых слагаемых к данному безгранично делимому закону (см. Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, Гостехиздат, М.—Л., 1949, 132. Например, если выполнены предположения приведенной выше теоремы, то слагаемые $a_nY_{nk} + (b_n/n)$ бесконечно малы, так как распределения их сумм во все возрастающем числе сходятся (см. теорему 4 на стр. 64 цитированной книги), и упомянутые условия применимы. Из этих условий сразу вытекает (поскольку величины $a_nY_{nk} + (b_n/n)$ при данном n независимы, одинаково распределены и r-точечны), что функции $M(x)$ и $N(x)$ в формуле Леви для характеристической функции предельного закона состоят из одних скачков, причем точка x, в которой имеется скачок, обязана быть пределом какого-то из возможных r значений величины $a_nY_{nk} + (b_n/n)$ при $n \to \infty$. Число s таких точек x, отличных от 0, т. е. число компонент Пуассона в предельном распределении, не превосходит $r-1$, так как $x=0$ всегда является таким пределом. Дисперсия нормальной компоненты σ^2 в формуле Леви не равна 0 лишь в том случае, если по крайней мере два из возможных r значений величины $a_nY_{nk} + (b_n/n)$ стремятся к 0. Тогда, очевидно, $s \leqslant r-2$. Это совпадает с утверждением теоремы.

А. А. Юшкевич

2315. Об одной задаче из теории ветвящихся случайных процессов. Золотарев В. М., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 2, 147—156

Рассматривается ветвящийся случайный процесс с одним типом частиц. Одна частица за время dt превращается в k частиц с вероятностью $p_k dt + o(dt)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ и не претерпевает изменений с вероятностью $1 + p_1 dt + o(dt)$. Пусть ν_t — число частиц в момент времени t, $P = P\{\min_{t \geqslant 0} \nu_t = 0 \mid \nu_0 = 1\}$ — вероятность того, что процесс, начавшийся с одной частицы, кончится тем, что все частицы исчезнут (вероятность вырождения), и $\eta = \max_{t \geqslant 0} \nu_t$. Доказывается, что условная функция распределения случайной величины η при условии, что $\nu_0 = k_0$ и процесс когда-нибудь вырождается, задается формулой

$$F_{k_0}(n) = P\{\eta < n+1 \mid \nu_0 = k_0, \min_{t \geqslant 0} \nu_t = 0\} = \frac{u_{n-k_0}}{P^{k_0} u_n},$$

где $\sum_{n=0}^{\infty} u_n z^n = p_0 f(z)$ и $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$.

Получены неравенства для $M\eta$ и асимптотическое при $n \to \infty$ выражение для $1 - F_{k_0}(n)$.

Б. А. Севастьянов

2316. Три теоремы теории вероятностей. Леви (Trois théorèmes de calcul des probabilités. Lévy Paul), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 24, 2283—2286 (франц.)

1. Если функция $\varphi(\sqrt{iz})$ — аналитическая в начале и является характеристической функцией некоторой неотрицательной случайной величины, то $\varphi(iz)$ также есть характеристическая функция.

2. Рассмотрим кривую, задаваемую уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x = X(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_1^{\infty} a_n (\xi_n \cos nt + \xi_n' \sin nt), \\ y = Y(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_1^{\infty} a_n (\eta_n \cos nt + \eta_n' \sin nt), \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

где греческие буквы (за исключением π) означают взаимно независимые случайные величины с нормальным (0,1) распределением, и $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$. Эта кривая окружает площадь

$$S = \sum_1^{\infty} n a_n^2 (\xi_n \eta_n' - \xi_n' \eta_n), \quad (2)$$

причем ряды (1) и (2) сходятся с вероятностью 1, если $\sum n^2 a_n^4 < \infty$; в этом случае площадь S (в классическом смысле, вообще говоря, несуществующая) с вероятностью 1 получает однозначное стохастическое определение.

3. Пусть вдоль оси u случайно (в смысле обычного пуассоновского процесса) разбросаны точки массы 1, причем в среднем на единицу длины приходится одна точка, и пусть эти точки взаимно притягиваются по закону Ньютона. Легко подсчитать, что напряжение X создаваемого этими точками случайного поля имеет закон распределения с плотностью $f(x) * f(-x)$, где

$$f(x) = \frac{1}{2} x^{-3/2} e^{-\pi/4x} \quad (x > 0),$$

что дает для логарифма характеристической функции выражение

$$\log M e^{izX} = -\sqrt{2\pi \mid z \mid}.$$

С другой стороны, пусть X' означает напряжение поля, создаваемого в отрезке $(-1, +1)$ притяжением масс, с материальной плотностью 1 распределенных вне этого отрезка (X', в отличие от X, не зависит от случая). Тогда «частично уравновешенное» напряжение $X - X'$ происходит от потенциала $2U + \log(1-u^2)$, где случайная величина U при любом u подчинена устойчивому закону с логарифмом характеристической функции

$$\log M e^{izU} = -\frac{\pi}{2} \mid z \mid - iz \log \mid z \mid.$$

В дальнейшем даются краткие указания относительно распространения этих результатов на многомерный случай. В частности, когда число измерений более трех, приходится рассматривать силы притяжения, отличные от ньютоновских.

Примечание референта. В формулировке теоремы пункта 1 вместо $\varphi(\sqrt{iz})$ напечатано $(\varphi\sqrt{iz})$.

А. Я. Хинчин

2317. О суммах симметрично зависимых случайных величин. Андерсен (On sums of symmetrically dependent random variables. Andersen Erik Sparre), Skand. aktuarietidskr., 1953, № 3—4, 123—138 (англ.)

Величины $X_1, X_2, \ldots, X_n$ называются симметрично зависимыми, если их совместная функция распределения $F_n(x_1, \ldots, x_n)$ есть симметрическая функция своих аргументов. Рассматривается последовательность сумм

$$S_0 = 0; \quad S_1 = X_1; \ldots; \quad S_k = X_1 + \cdots + X_k; \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n$$

и изучаются следующие характеристики этой последовательности: L_n — индекс k, для которого $S_k = \max(S_0, \ldots, S_n)$; $S_k > \max(S_0, \ldots, S_{k-1})$, M_n — индекс k, для которого $S_k = \min(S_0, \ldots, S_n)$; $S_k < \min(S_{k+1}, \ldots, S_n)$, N_n — число положительных сумм последовательности $S_0, \ldots, S_n$.

1) Доказывается, что величины N_n, L_n и $n - M_n$ одинаково распределены.

2) Пусть K_n обозначает одну из величин L_n, M_n, N_n. Тогда если X_i независимы и одинаково распределены, то

$$P\{K_n = m\} = P\{K_m = m\}\, P\{K_{n-m} = 0\}, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

3) В случае, если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ симметрично зависимы $P\{S_n = 0\} = 0$ и, кроме того, $\varepsilon_1 X_1$, $\varepsilon_2 X_2, \ldots, \varepsilon_n X_n$ имеют то же совместное распределение, что и $X_1, X_2, \ldots, X_n$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$; тогда

$$P\{K_n = m\} = (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{m} \binom{-\frac{1}{2}}{n-m}.$$

4) При тех же условиях вероятность события $A_{j,k}(n)$, заключающегося в том, что найдется только k таких индексов i, для которых $S_i < S_j$, определяется по формуле

$$P\{A_{j,k}(n)\} = \sum_{\nu=\max(0,\, j+k-n)}^{\min(j,\, k)} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{\nu} \times \binom{-\frac{1}{2}}{j-\nu} \binom{-\frac{1}{2}}{k-\nu} \binom{-\frac{1}{2}}{n-j-k+\nu}.$$

Отсюда могут быть получены без труда предельные теоремы для таких последовательностей $X_1, \ldots, X_n, \ldots$, у которых при каждом n величины $X_1, \ldots, X_n$ симметрично зависимы. Автор ограничивается ссылкой на предыдущие свои работы, где проделывается аналогичный предельный переход. *А. В. Скороход*

2318. Спектральная теория дифференциальных уравнений простых процессов рождения и смерти. Ледерман, Рейтер (Spectral theory for the differential equations of simple birth and death processes. Lederm a n n W., Reuter G. E. H.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1954, A246, № 914, 321—369 (англ.)

Вероятности $p_j(t)$ процесса рождения и смерти удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_0(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \\ \frac{d}{dt} p_j(t) &= \lambda_{j-1} p_{j-1}(t) - (\lambda_j + \mu_j) p_j(t) + \\ &\quad + \mu_{j+1} p_{j+1}(t), \quad j = 1, 2, \ldots, \end{aligned}\right\} \qquad (A)$$

где $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ — коэффициенты рождения и смерти $(\lambda_0 \geqslant 0,\ \lambda_j > 0,\ \mu_j > 0,\ j = 1, 2, \ldots)$. Для того чтобы решить бесконечную систему (A), предлагается два различных предельных перехода:

1) Решается конечная система $\frac{d}{dt} X(t) = X(t) A^{(n)'}$, где $A^{(n)}$ — квадратная матрица n-го порядка, элементы которой заполняют левый верхний угол бесконечной матрицы системы (A), и затем в пределе при $n \to \infty$ получается решение системы (A).

2) Решается конечная система $\frac{d}{dt} Y(t) = Y(t) B^{(n)}$, где $B^{(n)}$ — матрица, отличающаяся от матрицы $A^{(n)'}$ только тем, что правый нижний элемент равен $-\mu_n$, а затем в пределе при $n \to \infty$ получается решение системы (A).

Специально разбирается случай, когда коэффициенты λ_n и μ_n удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1 + \frac{a}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{\lambda_n}{\mu_n} = c\left[1 + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right],$$

причем показывается, что при некоторых значениях параметров a, b, c решения системы (A), полученные двумя вышеописанными способами, различны. *Б. А. Севастьянов*

2319. Эффективные решения линейных аппроксимационных задач для процессов со случайными стационарными n-ми приращениями. Яглом А. М., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 2, 189—192

Статья содержит упомянутые в заглавии эффективные решения для задач линейной экстраполяции и фильтрации процессов со стационарными приращениями данного порядка n при данной форме спектральной плотности $f(\lambda)$ и в некоторых случаях дает существенное обобщение ранее известных результатов для $n = 0$.

В теореме 1 решается задача экстраполяции для $n = 1$ и спектральной плотности

$$f(\lambda) = \frac{C\,|\lambda|^{2(1-\alpha)}}{1+\lambda^2} \quad \left(C > 0,\ \frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{2}\right).$$

В теореме 2 та же задача решается для произвольного n и для

$$f(\lambda) = \frac{C\,|B(\lambda)|^2}{(1+\lambda^{2n})\,|A(\lambda)|^2}, \qquad (1)$$

где $C>0$, а $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ — многочлены степеней соответственно N и M относительно λ, причем $M<N+n$, и все корни обоих многочленов лежат в верхней комплексной полуплоскости. В теореме 3 решается задача фильтрации в предположении спектральной плотности (1) данного процесса, причем относительно определяющей фильтр случайной величины также делаются дополнительные специальные предположения. В трех перечисленных теоремах исходный интервал времени, в котором процесс задан, предполагается бесконечным (от $-\infty$ до некоторого t). В теоремах 4 и 5 задачи экстраполирования и фильтрации решаются (при той же форме (1) спектральной плотности) в предположении исходного интервала конечной длины. В теореме 6 процесс предполагается заданным всюду вне конечного интервала $(t, t+T)$ и интерполируется на этот интервал. Статья не содержит доказательств.

Библиография, 10 названий. *А. Я. Хинчин*

2320. О линейном экстраполировании случайных процессов со стационарными n-ми приращениями. Пинскер М. С., Яглом А. М., Докл. АН СССР, 1954, **94**, № 3, 385—388

Заметка опирается на определения и результаты работы тех же авторов (РЖМат, 1953, 1277).

Решается задача, являющаяся обобщением задачи о линейном экстраполировании стационарных случайных процессов. Пусть $\xi(t)$ — случайный процесс со стационарными n-ми приращениями такой, что $M\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)=0$. Ставится задача нахождения по известной структурной функции n-го порядка $D^{(n)}(t;\ \tau_1, \tau_2)$ процесса $\xi(t)$ величины

$$\sigma^2(s,\tau)=\inf_{\substack{m=1,2,\dots\\ \tau,\tau_j>0;\ t_j\geqslant 0}} M\left|\Delta_\tau^{(n)}\xi(t+s)-\sum_{j=1}^{m}c_j\Delta_{\tau_j}^{(n)}\xi(t-t_j)\right|^2, \qquad (1)$$

которую авторы называют средним квадратом ошибки экстраполирования.

Случайный процесс $\xi(t)$ со стационарными n-ми приращениями называется сингулярным, если при любых s и τ

$$\sigma^2(s,\tau)=0;$$

процесс называется регулярным, если при любом τ

$$\lim_{s\to\infty}\sigma^2(s,\tau)=M\left|\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)\right|^2=D^{(n)}(0;\tau,\tau).$$

Теорема 4. Если $\xi(t)$ есть регулярный случайный процесс со стационарными n-ми приращениями, то при $\tau>0$ имеет место представление

$$\Delta_\tau^{(n)}\xi(t)=\int_0^\infty\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)\,d_p\zeta(t-p)=\int_{-\infty}^{t}\Delta_\tau^{(n)}\varphi(t-p)\,d\zeta(p),$$

где

$$\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)=\varphi(p)-C_n^1\varphi(p-\tau)+\cdots$$

есть n-я разность комплексной измеримой функции $\varphi(p)$, удовлетворяющей условию, что $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)$ при любом τ есть функция p с интегрируемым квадратом модуля, обращающаяся в нуль на отрицательной полуоси, а $\zeta(t)$ есть случайный процесс со стационарными некоррелированными приращениями, удовлетворяющий условиям

$$M[\zeta(t)-\zeta(s)]=0;\quad M|\zeta(t)-\zeta(s)|^2=|t-s|$$

и такой, что при любых t и $\tau>0$ случайная величина

$$\Delta_\tau\zeta(t)=\zeta(t)-\zeta(t-\tau)$$

может быть сколь угодно точно аппроксимирована в среднем квадратичном линейной комбинацией случайных величин $\Delta_{\tau_k}^{(n)}\xi(t-s_k)$ с $\tau_k>0$, $s\geqslant 0$. Величины $\Delta_\tau^{(n)}\varphi(p)$ и $\Delta_\tau\zeta(t)$ определяются процессом $\xi(t)$ с точностью до постоянного множителя, по абсолютной величине равного единице.

На основании этой теоремы и теоремы о разложении любого процесса со стационарными n-ми приращениями в сумму сингулярного и регулярного процессов авторы получают окончательную формулу для функции $\varphi(p)$, решающую поставленную задачу о нахождении величины (1).

Кроме того, авторы рассматривают в качестве примера случайные процессы со стационарными n-ми приращениями, инвариантными относительно преобразований подобия, и дают полное описание всех таких процессов. Теоремы приведены без доказательств. *Я. И. Хургин*

2321. Приложение теории вероятностей к изучению уравнения Лапласа. Кац (An application of probability theory to the study of Laplace's equation. Kac M.), Roczn. Polskiego towarz. mat., 1952, **25**, 122—130 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (англ.)

Строится, с использованием результатов работы автора (см. Proc. second Berkeley, Sympos. Math. Statist. and Probability, 1951, 189—215), функция Грина для уравнения Лапласа, рассматриваемого в ограниченной замкнутой трехмерной области Ω с нулевыми граничными условиями.

Пусть Ω_0 — множество внутренних точек Ω и K — замкнутая сфера, содержащая Ω. Обозначим $B=K-\Omega_0$ и введем

$$V_B(\mathbf{r})=\begin{cases}1, & \text{если } \mathbf{r}\in B,\\ 0, & \text{если } \mathbf{r}\notin B.\end{cases}$$

Доказывается, что функция Грина уравнения Лапласа в области Ω представима в виде

$$G(\mathbf{y},\mathbf{r})=\lim_{u\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{4}{3}\pi\delta^3\right)^{-1}\times\int_0^\infty\psi(t;u,\delta,\mathbf{y},\mathbf{r})\,dt,$$

где

$$\psi(t;u,\delta,\mathbf{y},\mathbf{r})=\int_A\exp\left\{-u\int_0^t V_B(\mathbf{y}+\mathbf{r}(\tau))\,d\tau\right\}dW;$$

W — винеровская мера, соответствующая трехмерному броуновскому движению; A — множество тех путей, для которых $|\mathbf{y}+\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}|<\delta$, $\mathbf{r}(t)$ — вектор, описывающий положение в момент времени t блуждающей частицы ($\mathbf{r}(0)=0$).

Функция $G(\mathbf{y}, \mathbf{r})$ обращается в нуль в каждой точке $\mathbf{y}_0$ границы Ω_0, в которой для каждого $t > 0$ выполняется условие

$$P\{\mathbf{y}_0 + \mathbf{r}(\tau) \notin B, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t\} = 0.$$

Результат легко распространяется на случай большего числа измерений, но для плоскости метод неприменим. *В. С. Королюк*

2322 К. Теория суммирования случайных величин. Леви (Théorie de l'addition des variables aléatoires. Lévy Paul, 2-nd ed., XX+388 pp., Paris, Gauthier-Villars, 1954), Bibliogr. France, 1954, **143**, ч. 1, № 31—32, 726 (библ.)

2323 К. Элементарное введение в теорию вероятностей. Гнеденко, Хинчин (Перев. с русс.) (Elementarny wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. Gnedenko B., Chinčin A. Wyd. 2, 158 s., rys. (Tłum. z rosyjskjego), Warszawa, Panstw., Wydawn. Nauk, 1954, 7.65 zł.), Przew.bibliogr., 1954, **10**, № 30, 399 (библ.)

2324 К. Элементарное введение в теорию вероятностей. Гнеденко, Хинчин (Перев. с русс.) (Elementární úvod do theorie pravděpodobnosti. Gněděnko B. V.; Chinčin A. J. Z. rus., 1 vyd., 114 s., il., Praha, SNTL, 1954, 7,20 Kcs), Česká kniha, 1954, № 19, 586 (библ.)

2325 РЕЦ. Теория вероятностей. Юнковский В. А., 320 стр., М., Военмориздат, 1953, 10 р. 90 к. [**Рецензия: Петров В. В., Линник Ю. В.** Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 3(61), 278—282]

2326 Д. Предельные законы для цепей Маркова с конечным числом состояний. Ильяшенко А. А., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Киевск. ун-т, Киев, 1954

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

2327. О методе наименьших квадратов и его экстремальных свойствах. Петров В. В., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 1, 41—62

Пусть наблюденные величины $y_1, \ldots, y_N$ связаны с неизвестными параметрами $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ линейными соотношениями

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} x_{ik}\alpha_k + \delta_i \qquad (n < N), \qquad (1)$$

где δ_i — независимые нормально распределенные случайные ошибки с $M\delta_i = 0$, $M\delta_i^2 = \sigma_i^2$; матрица $\| x_{ik} \|$ задана и имеет ранг n. Обозначим через α_k^* оценки параметров α_k, полученные способом наименьших квадратов.

А. Н. Колмогоров предложил удобный метод исследования свойств оценок α_k^* в случае равноточных наблюдений y_i (Колмогоров А. Н., Успехи матем. наук, 1946, 1, № 1, 57—70). Автор в первой части работы распространяет результаты А. Н. Колмогорова на случай неравноточных наблюдений. Во второй части при указанных выше ограничениях относительно δ_i доказывается, что α_k^* являются совместно-эффективными оценками среди всех несмещенных регулярных оценок (не обязательно линейных). Эта теорема верна и в том случае, когда неизвестные параметры, помимо системы (1), удовлетворяют известным уравнениям связи вида:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{ik}\alpha_k = b_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu \qquad (\nu < n). \qquad (2)$$

Далее доказывается следующая теорема: Если взаимно независимые ошибки δ_i распределены по закону с дифференцируемой плотностью, причем $M\delta_i = 0$, $M\delta_i^2 = \sigma_i^2$, и если оценки α_k^* совместно-эффективны при любых x_{ik}, то закон распределения ошибок нормален.

В заключение указываются доверительные интервалы для неизвестных параметров, как в случае наличия, так и в случае отсутствия уравнений связи вида (2). *Л. Н. Большев*

2328. Проверка простой гипотезы при конкурирующей простой гипотезе. Вейсс (Testing one simple hypothesis against another. Weiss Lionel), Ann. Math. Statistics, 1953, **24**, № 2, 273—281 (англ.)

Пусть X — случайная величина, имеющая при гипотезе H_i плотность распределения $f_i(x)$ $(i = 1, 2)$, $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность результатов независимых наблюдений X, на основе которой требуется произвести выбор между H_1 и H_2. Пусть $P_T^i(n)$ — вероятность того, что число наблюдений до принятия решения не превзойдет n, если для прихода к решению используется процедура (критерий) T и верна гипотеза H_i, $P_T^i(H_j)$ — вероятность того, что при тех же условиях будет принята гипотеза H_j $(i, j = 1, 2)$. Автор называет обобщенным последовательным критерием (generalized sequential probability ratio test) следующую модификацию обычного последовательного анализа Вальда (Wald A., Sequential analysis, N. Y., John Wiley and Sons, 1947): даны две последовательности $\{A_i\}$ и $\{B_i\}$ $(i = 1, 2)$; пока $B_n < \prod_1^n f_2(x_j) / \prod_{j=1}^n f_1(x_j) < A_n$ производят наблюдения над X; в первый же раз, когда это условие не выполнено, прекращают наблюдения приемом гипотезы 1) H_1 — если нарушено левое неравенство, 2) H_2 — если нарушено правое неравенство.

При некоторых ограничениях на $f_i(x)$ доказывается следующее свойство класса таких критериев: если T — некоторый критерий для отличия H_1 и H_2, удовлетворяющий только условию $\lim_{n\to\infty} P_T^i(n) = 1$, то существует равномерно лучший, чем T, обобщенный последовательный критерий G, т. е. $P_G^i(n) \geqslant P_T^i(n)$, $P_G^i(H_i) \geqslant P_T^i(H_i)$ $(n = 1, 2, \ldots; i = 1, 2)$.

Доказательство осуществляется «урезыванием» критерия T и построением последовательности $\{G_j\}$ обобщенных последовательных критериев, для ко-

торой $P^i_{G_j}(n) \geqslant P^i_T(n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\lim\limits_{j\to\infty} P^i_{G_j}(H_i) \geqslant$ $\geqslant P^i_T(H_i)$ $(j = 1, 2, \ldots;\ i = 1, 2)$. *В. С. Михалевич*

2329. Сходимость эмпирического распределения к теоретическому распределению. Фортэ, Мурье (Convergence de la répartition empirique vers la répartition théorique. Fortet R., Mourier E.), Ann. scient. École norm. supér., 1953, **70**, сер. 3, № 3, 267—285 (франц.)

Доказываются результаты, сообщенные ранее (РЖМат, 1954, 1726). Доказательства основаны на использовании теоремы Мурье (Mourier E., Eléments aléatoires dans un espace de Banach (Thèse de Doctorat), Paris, 1952), обобщающей усиленный закон больших чисел на случайные величины со значениями из пространства Банаха (РЖМат, 1955, 359). В заключительной части работы эмпирические функции распределения $F_n(u)$, построенные по независимым наблюдениям случайной величины, имеющей равномерное распределение в интервале (0,1), интерпретируются как случайные элементы гильбертова пространства $L_2(0,1)$ и находится предельное распределение в пространстве $L_2(0,1)$ для $\sqrt{n}[F_n(u) - u]$. Из этого результата выводится выражение для характеристической функции ω^2-распределения Мизеса — Смирнова. *Е. Б. Дынкин*

2330. Двумерное обобщение t-распределения Стьюдента с таблицами для некоторых специальных случаев. Даннетт, Собел (A bivariate generalization of Student's t-distribution with tables for certain special cases. Dunnett Charles W., Sobel Milton), Biometrika, 1954, **41**, № 1—2, 153—169 (англ.)

Пусть случайные величины z_1 и z_2 имеют невырожденное совместное нормальное распределение со средними, равными нулю, общей неизвестной дисперсией σ^2 и известным коэффициентом корреляции ρ. Пусть величина ns^2/σ^2 не зависит от z_i и имеет χ^2-распределение с n степенями свободы. Тогда плотность совместного распределения величин $u = z_1/s$, $v = z_2/s$ имеет вид

$$g_n(u, v; \rho) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \times$$
$$\times\left[1 + \frac{u^2 - 2\rho uv + v^2}{n(1-\rho^2)}\right]^{-(n+2)/2}.$$

Указывается точное представление интеграла

$$P_n(h, k, \rho) = \int\limits_{-\infty}^{h}\int\limits_{-\infty}^{k} g_n(u, v; \rho)\, du dv \qquad (1)$$

через значения неполной бэта-функции, практически пригодное для вычислений при малых n. Для вычисления $P_n(h, k, \rho)$ при больших n предлагаются приближенные формулы, основанные на асимптотическом разложении по степеням $1/n$ разности между (1) и соответствующей предельной нормальной функцией распределения. Определим $t_n(P, \rho)$ из уравнения

$$\int\limits_{-\infty}^{t_n}\int\limits_{-\infty}^{t_n} g_n(u, v; \rho)\, du\, dv = P.$$

Указывается асимптотическое разложение $t_n(P, \rho)$ по степеням $1/n$.

К статье прилагаются таблицы функций $P_n(t,t,\rho)$ и $t_n(P, \rho)$ для $\rho = \pm 0{,}5$ и различных значений n, t и P. Кроме того, приведены таблицы коэффициентов A_m и B_m $(0 \leqslant m \leqslant 4)$ для $\rho = \pm 0{,}5$ и различных значений P и t, позволяющие вычислять $P_n(t, t, \rho)$ и $t_n(P, \rho)$ по формулам

$$P_n(t, t, \rho) \approx A_0 + \frac{A_1}{n} + \frac{A_2}{n^2} + \frac{A_3}{n^3} + \frac{A_4}{n^4},$$
$$t_n(P, \rho) \approx B_0 + \frac{B_1}{n} + \frac{B_2}{n^2} + \frac{B_3}{n^3} + \frac{B_4}{n^4}. \qquad (2)$$

Указываются значения n, начиная с которых расчет по формулам (2) обеспечивает такую же точность, как и упомянутые выше таблицы.

Н. П. Бусленко

2331. Таблицы функций Пирсона — Ли — Фишера для односторонне-усеченных нормальных распределений. Коэн, Вудуорд (Tables of Pearson — Lee — Fisher functions of singly truncated normal distributions. Cohen A. C., Jr., Woodward John), Biometrics, 1953, **9**, № 4, 489—497 (англ.)

Для оценки параметров m и σ односторонне-усеченного нормального распределения

$$f(x) = \frac{1}{I(\xi)\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right\},$$
$$x_0 \leqslant x \leqslant \infty,$$

где $\xi = (x_0 - m)/\sigma$, $I(\xi) = \int\limits_{\xi}^{\infty} \varphi(t)\, dt$, $\varphi(t) = (2\pi)^{-1/2} \times$ $\times \exp(-t^2/2)$, могут быть применены формулы Пирсона, Ли и Фишера (см., например, Cohen A. C., J. Amer. Statist. Assoc., 1949, **44**, 518—525):

$$\sigma^* = \frac{\Sigma x'}{n(Z^* - \xi^*)}, \qquad m^* = x_0 - \sigma^*\xi^*,$$

где $Z^*(\xi^*) = \varphi(\xi^*)/I(\xi^*)$, а ξ^* определяется по выборочным значениям из трансцендентного уравнения

$$\psi(\xi^*) = \frac{1}{2(Z^* - \xi^*)}\left(\frac{1}{Z^* - \xi^*} - \xi^*\right) = \frac{n\Sigma x'^2}{2(\Sigma x')^2}.$$

Здесь x' — отклонения выборочных значений от границы усечения x_0. Приводятся необходимые для конкретных вычислений таблицы зависимости $(Z - \xi)^{-1}$ и $\psi(\xi)$ от ξ при изменении ξ от $-4{,}0$ до $+3{,}0$ с шагом 0,1, причем интервал значений ξ от $-2{,}5$ до $+0{,}5$ табулирован с шагом 0,01, а также формулы и таблицы для вычисления дисперсий σ^* и ξ^* и коэффициента корреляции $\rho_{\sigma^*\xi^*}$. *А. С. Монин*

2332. Правдоподобие, вероятность, возможность. Штейнхаус (Prawdopodobieństwo, wiarogodność i możliwość. Steinhaus H.), Zastosow. mat., 1954, **1**, № 3, 149—172 (польск.; резюме русс., англ.)

Автор отмечает случаи, в которых «правдоподобие» (likelihood) и «доверительные вероятности» (fiducial probability) Фишера совпадают с плотностями ве-

роятностей и вероятностями, вычисленными по правилу Бейеса при равномерном априорном распределении.

Теория доверительных интервалов упоминается в статье лишь в связи с фишеровской концепцией «доверительных вероятностей». (По поводу обоснования теории доверительных интервалов при помощи теоремы Бейеса с произвольным априорным распределением см., например, статью референта в Изв. АН СССР, сер. матем., 1942, **6**, 3—32).

Роль оценок наибольшего правдоподобия в теории асимптотической эффективности оценок не упоминается. *А. Н. Колмогоров*

2333. Полустохастическая корреляция. Э й д е л ь н а н т М. И., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1953, № 11, 29—51

Изучается зависимость случайной величины u от неслучайных величин $x, y, z, \ldots$ в форме

$$u = \sum_i \omega_i f_i(x, y, z, \ldots),$$

где $\omega_i = \omega_i(v, w, \ldots)$ есть функции от случайных величин $v, w, \ldots$. На рассматриваемую зависимость с некоторыми изменениями непосредственно переносятся результаты, известные в теории корреляции.

Примечание референта. Имеются неясные формулировки, например: «Величины $v, w, \ldots$ не зависимы от $x, y, z, \ldots$ ни точно, ни приближенно». *В. С. Королюк*

2334. Заметка о регрессии при наличии дополнительной информации об одном из коэффициентов. Д е р б и н (A note on regression when there is extraneous information about one of the coefficients D u r b i n J.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 264, 799—808 (англ.)

Рассматривается уравнение линейной регрессии Y на X_1 и X_2

$$Y = \alpha + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \varepsilon,$$

причем n значений ε независимы друг от друга и от значений X_1 и X_2 и имеют нулевые средние значения и дисперсии σ^2. Требуется оценить коэффициент β_2 при условии, что для β_1 предложена несмещенная оценка b_1 вместе с несмещенной оценкой s_1^2 для ее дисперсии σ_1^2.

Простейший метод заключается в рассмотрении регрессии $Y - b_1 X_1$ на X_2. Приводятся формулы для оценки b_2 коэффициента β_2 и предлагается оценка для дисперсии величины b_2. Однако наиболее эффективным является метод наименьших квадратов, причем следует искать условный минимум суммы квадратов ошибок. Поправки δb_i, которые следует прибавить к оценкам b_i' обычного метода наименьших квадратов, определяются из уравнений

$$\delta b_1 \left(\sum x_1^2 + \lambda\right) + \delta b_2 \sum x_1 x_2 = \lambda (b_1 - b_1');$$

$$\delta b_1 \sum x_1 x_2 + \delta b_2 \sum x_2^2 = 0,$$

где x_1, x_2 — отклонения значений X_1, X_2 от выборочных средних, а $\lambda = \sigma^2 / \sigma_1^2$ должно быть оценено обычным методом. Приводятся формулы для дисперсий эффективных оценок коэффициентов регрессии. Все формулы легко обобщаются на случай большего числа статистических переменных. *А. С. Монин*

2335. Выбор «по группам». Й о н е д а (On the use of the Neyman's allotation. Y o n e d a K e i z o), Yokohama Math. J., 1953, **1**, 117—123 (англ.)

2336 К. Выборочный метод. К о к р а н (Sampling techniques. C o c h r a n W i l l i a m G. XIV+330 pp., N. Y., John Wiley and Sons, Inc., London, Chapman and Hall, Limited, 1953, 6.50 doll.) (англ.)

Дается детальное элементарное изложение выборочного метода. Большую часть книги занимают вычисления математических ожиданий и дисперсий выборочных характеристик при различных системах выборки из конечной генеральной совокупности. В некоторых случаях даются доверительные интервалы для неизвестных параметров генеральной совокупности. Специально рассматривается вопрос о стоимости выборочного исследования и об оптимальных выборочных методах в различных задачах. Приведено много числовых примеров, иллюстрирующих изложение. Книга состоит из следующих глав: 1. Введение. 2. Простая случайная выборка. 3. Выборка из генеральной совокупности, элементы которой различаются по качественному признаку. 4. Оценка объема выборки. 5. Случайная выборка по группам. 6. Оценки с помощью отношения. 7. Оценки с помощью регрессии. 8. Систематическая выборка. 9. Выборочные единицы. 10. Двухстепенная выборка в случае выборочных единиц равного объема. 11. Двухстепенная выборка в случае выборочных единиц неравного объема. 12. Двойная выборка. 13. Источники ошибок в исследованиях.

Каждая глава снабжена списком литературы. *Б. А. Севастьянов*

2337 К. Формулы и таблицы математической статистики. Г р а ф, Х е н п и н г (Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. G r a f U l r i c h, H e n n i n g H a n s - J o a c h i m. Springer — Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1953, VI+102 pp., 9 DM) (нем.)

Эта книга является сводкой формул и таблиц, применяемых в математической статистике. Приведены примеры, показывающие, как могут быть применены формулы, а таблицы дополнены несколькими номограммами. Большинство формул соответствует весьма элементарным результатам. Среди результатов, относящихся к применениям, использующим дисперсионный анализ, контрольные карты и последовательный анализ, нет ничего нового. Эта книга будет наиболее полезна статистикам-практикам, не имеющим дела с очень большим разнообразием проблем. Несмотря на то, что книга предполагалась ограниченного объема, следовало бы в ней подробнее рассмотреть вопрос о непараметрических критериях. *H. Chernoff*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 140.

ТЕОРИЯ ИГР

2338. Игры с двумя участниками и возможностью их кооперирования. Н а ш (Two-person cooperative games. N a s h J o h n), Econometrica, 1953, **21**, 128—140 (англ.)

Индексы 1 и 2 обозначают величины, относящиеся соответственно к первому и второму игроку. Предполагаются заданными множества $S_1 = \{s_1\}$ и $S_2 = \{s_2\}$ «стратегий», которые каждый из игроков может выбрать независимо от другого. Паре (s_1, s_2), где $s_1 \in S_1$, $s_2 \in S_2$, соответствуют определенные выигрыши

$$u_1 = P_1(s_1, s_2),$$

$$u_2 = P_2(s_1, s_2)$$

(u_1 и u_2 — действительные числа). Предполагается, однако, что множество B точек (u_1, u_2) на плоскости, изображающих возможные распределения выигрышей, не исчерпывается точками, получающимися указанным выше способом: кроме них множество B содержит распределения выигрышей, которые могут быть получены лишь при «кооперировании» игроков, т. е. при их взаимном соглашении. При некоторых дополнительных допущениях автор находит выигрыши

$$u_1 = v_1, \quad u_2 = v_2,$$

которые получаются в случае разумного ведения переговоров между игроками. *А. Н. Колмогоров*

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

2339. Предложение о видоизменении теории шумов. Килсон (A suggested modification of noise theory. Keilson Julian), Quart. Appl. Math., 1954, **12**, № 1, 71—76 (англ.)

Ряд физических явлений моделируется процессом Маркова, управляемым уравнением Фоккера-Планка

$$\tau_0 \frac{\partial W}{\partial t} = E_0 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}(xW),$$

где $W = W(x, t) = P(x_0 \mid x;\ t)$ — условная плотность распределения физической величины $\xi(t)$ в момент времени t при гипотезе $\xi(0) = x_0$, τ_0 и E_0 — параметры распределения. Однако модель Фоккера-Планка приводит к бесконечному числу изменений знака функции $\xi(t)$ за единицу времени. Автор рассматривает семейство разрывных процессов Маркова A_γ, управляемых уравнением Колмогорова — Феллера

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = -W(x, t) \int A_\gamma(x, x')\, dx' + \int W(x', t)\, A_\gamma(x', x)\, dx', \qquad (1)$$

где

$$A_\gamma(x, x') = \frac{1}{T}\left(\frac{\beta}{\pi}\right)^{1/2} \exp\{-\beta(x' - \gamma x)^2\},\ 0 < \gamma < 1,$$

$$T = \tau_0(1 - \gamma), \quad \beta = [2E_0(1 - \gamma^2)]^{-1}.$$

Процесс A_γ и процесс Фоккера-Планка имеют одинаковые предельные распределения при $t \to \infty$, одинаковую корреляционную функцию, и при $\gamma \to 1$ вероятности перехода в процессе A_γ сходятся к вероятностям перехода в процессе Фоккера-Планка. Что же касается среднего числа изменений знака случайной функции, описываемой уравнением (1), то оно конечно и равно (в единицу времени)

$$\frac{1}{\pi\tau_0(1 - \gamma)} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{\frac{1 - \gamma}{1 + \gamma}}.$$

Поэтому автор считает, что процесс A_γ лучше описывает шумы, чем модель Фоккера-Планка. С этой точки зрения среднее число изменений знака случайной функции $\xi(t)$ следует рассматривать как независимый макроскопический параметр, характеризующий физический процесс.

Примечание референта. Более общий предельный переход от разрывных процессов Маркова к непрерывным и предельное распределение числа пересечений случайной функцией $\xi(t)$ произвольной прямой был рассмотрен референтом (Укр. матем. ж., 1954, 6, № 1, 28—36). *И. И. Гихман*

2340. Обсуждение работ «Статистические критерии обнаружения последовательности импульсов на фоне шумов. I, II». Миддлтон (Discussion of «Statistical criteria for the detection of pulsed carriers in noise. I, II». Middleton D.), J. Appl. Phys., 1954, **25**, № 1, 128—130 (англ.)

См. РЖМат, 1955, 1405, 1406.

2341. Дальнейшие замечания относительно природы статистического наблюдателя. Миддлтон (Further remarks on the nature of the statistical observer. Middleton David), J. Appl. Phys., 1954, **25**, № 1, 127 (англ.)

Некоторые дополнительные замечания и небольшие поправки к предыдущим статьям автора (РЖМат, 1955, 1405, 1406). *А. М. Яглом*

2342. Сравнение амплитудной и фазовой модуляции при передаче по каналу с узкой полосой пропускания двоично-кодированных сообщений, искаженных флюктуирующим шумом. Монтгомери (A comparison of amplitude and angle modulation for narrow-band communication of binary-coded messages in fluctuation noise. Montgomery G. Franklin), Proc. I. R. E., 1954, **42**, № 2, 447—454 (англ.)

В связи с запросами теории передачи электрических сигналов в статье разбираются решения ряда конкретных теоретико-вероятностных задач, касающихся сложения векторных случайных величин с некоторыми определенными законами распределения амплитуды и фазы. Результаты расчетов представлены в графической форме; подробно обсуждаются практические выводы из этих результатов. *А. М. Яглом*

2343. Время ожидания телефонных вызовов, обслуживаемых в порядке, обратном порядку их поступления. Воло (Délais d'attente des appels téléphoniques dans l'ordre inverse de leur arrivée. Vaulot Émile), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 11, 1188—1189 (франц.)

Рассматривается классическая схема Эрланга конечного полнодоступного пучка с ожиданием, в простейших предположениях (показательное распределение как для расстояния между соседними вызовами, так и для длительности разговора, при обычных предпосылках взаимной независимости); предполагается, что вызовы обслуживаются в порядке, обратном порядку их поступления. Пусть $g_n(t)$ —

вероятность времени ожидания $> t$ для данного вызова в момент, когда имеется n ожидающих, имеющих право на более раннее обслуживание, и $g(t)$ — вероятность того же события, когда n неизвестно. С помощью обычного сопоставления двух бесконечно близких моментов времени легко находится для функций $g_n(t)$ система уравнений

$$(x+y)\,g_0 + g_0' = y g_1,$$

$$(x+y)\,g_n + g_n' = x g_{n-1} + y g_{n+1} \quad (n>0),$$

где x — число линий пучка, y — среднее число вызовов в единицу времени, принимаемую равной средней длительности разговора. Решением этой системы служит система функций

$$g_n(t) = \frac{2}{\pi \alpha^{n/2}}\, e^{-(1+\alpha)t} \times$$

$$\times \int_0^{\pi} \frac{\sin\varphi \sin(n+1)\varphi}{1 - 2\sqrt{\alpha}\cos\varphi + \alpha}\; e^{2\sqrt{\alpha}t\cos\varphi}\, d\varphi \quad (\alpha = y/x).$$

Отсюда автор заключает, что

$$g(t) = \frac{2}{\pi}\, e^{-(1+\alpha)xt} \times$$

$$\times \int_0^{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{(1 - 2\sqrt{\alpha}\cos\varphi + \alpha)^2}\; e^{2\sqrt{\alpha}xt\cos\varphi}\, d\varphi.$$

Доказательства в заметке не приводятся. Референт полагает, что приведенные формулы содержат искажающие смысл опечатки. *А. Я. Хинчин*

2344. Общая теория телефонного траффика. Лундквист (General theory for telephone traffic. Lundkvist Karl), Ericsson Techn., 1953, **9**, № 2, 111—140 (англ.)

При построении математической теории телефонного траффика (нагрузки) обычно исходят из определенных предпосылок, характеризующих этот траффик как случайный процесс; эти предпосылки касаются как потока поступающих вызовов, так и условий обслуживания, причем должен быть учтен и характер взаимной зависимости между этими двумя элементами траффика. Принятые предпосылки обычно дают возможность составить систему дифференциальных или интегральных уравнений, связывающих между собою основные характеристики траффика. Таким образом, поставленная задача получает чисто аналитическую формулировку, в которой она и решается аналитическими методами.

Автор статьи ставит себе целью разработку совсем нового подхода к задаче исследования телефонного траффика. Автор показывает, что значительная часть описанного нами выше пути может быть пройдена без использования аналитических методов, на основе одних только элементарно-статистических соображений общего характера. Выводы, к которым приводят эти соображения, имеют универсальный характер в том смысле, что не зависят от специальных свойств данного траффика как случайного процесса. Величины, входящие в полученные формулы, сохраняют свой реальный смысл при любом характере траффика. Если мы затем выберем предпосылки, характеризующие данный траффик как случайный процесс, то общие формулы получают специфическую форму, позволяющую определить искомые характеристики этого процесса (необходимой предпосылкой этого шага является, впрочем, нигде автором явно не оговоренная эргодичность всего процесса, т. е. возможность отождествлять математические ожидания всех рассматриваемых величин с их временными средними).

Для иллюстрации метода рассмотрим теорию полнодоступного пучка из n линий с потерями (задача Эрланга). Пусть Δ_k означает промежуток времени, в течение которого занято k линий; такой промежуток начинается и кончается либо вызовом, либо освобождением линии. Пусть A_k и B_k соответственно означают долю тех промежутков Δ_k, которые начинаются вызовом и освобождением, так что $A_k + B_k = 1$. Пусть M_k — средняя длительность промежутка Δ_k, и p_k — вероятность того, что в произвольно выбранный момент времени мы застанем k занятых линий (p_k определяется статистически, как суммарная длительность всех промежутков Δ_k за некоторый большой отрезок времени, разделенная на длину этого отрезка). Непосредственно очевидно, что в любом отрезке времени число промежутков Δ_k, начинающихся и кончающихся вызовами, совпадает с числом промежутков Δ_k, начинающихся и кончающихся освобождением линии. Из этого тривиального факта легко придти с помощью элементарных статистических рассуждений к универсальной рекуррентной формуле

$$\frac{A_{k+1}}{M_{k+1}}\; p_{k+1} = \frac{B_k}{M_k} p_k \quad (k = 0,1,\ldots,n-1), \quad (1)$$

которая служит основой всего метода Лундквиста и которая имеет место для траффика любого типа. Искомыми здесь являются «вероятности состояний» p_k, которые формулами (1) однозначно определяются, если добавить «нормирующее» соотношение $p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1$. Разумеется, решение задачи зависит от вида величин A_k, B_k и M_k, получающих то или другое выражение в зависимости от предпосылок, определяющих характер траффика как случайного процесса. Обычно принимают, что поток вызовов имеет простейшую природу (показательное распределение расстояний между соседними вызовами). Что касается длин разговоров, то они всегда предполагаются независимыми как друг от друга, так и от потока вызовов (а следовательно, и от числа занятых линий). Эрланг предполагал, что длины разговоров распределены по показательному закону, и в этом предположении установил свои известные, прочно вошедшие в практику формулы для величин p_k. Предположение Эрланга легко дает величинам A_k, B_k и M_k очень простые выражения, с помощью которых рекуррентное соотношение (1) непосредственно приводит к формулам Эрланга без какого бы то ни было аналитического аппарата. Ввиду практической важности формул Эрланга и ввиду того, что сделанное Эрлангом предположение о показательном распределении длительности разговоров в большинстве приложений мало правдоподобно, был сделан ряд попыток показать, что формулы Эрланга сохраняют силу и при более общих предположениях. Эти попытки приводили к очень сложному аналитическому аппарату, и тем не менее не достигали поставленной цели. Лундквист своим методом делает попытку показать, что формулы Эрлан-

га остаются верными и в предположении, что все разговоры имеют одну и ту же стандартную длительность (случай, важный в практическом отношении). Впрочем, можно, лишь немного усложняя рассуждения Лундквиста, показать тем же методом, что и при произвольном законе распределения длин разговоров мы приходим к тем же формулам Эрланга. Однако рассуждение автора, по мнению референта, содержит пробел, из-за которого доказательство остается неполным даже в предположении стандартной длительности разговоров.

В заключительной части работы автор, снова исходя из соотношения (1), рассматривает основные задачи для систем с ожиданием и получает для них ряд результатов. *А. Я. Хинчин*

2345. Теория информации. Земанек (Informationstheorie. Zemanek Heinz), Elektrotechnik und Maschinenbau, 1954, **71**, № 7, 153—160 (нем.)

Очерк основных понятий и методов теории информации. Перечень потенциальных областей применения содержит обычные для такого рода обзоров преувеличения. *А. Я. Хинчин*

2346. Информация, организация и системы. Ротстейн (Information, organization and systems. Rothstein Jerome), Trans. I. R. E., 1954, PGIT-4, 64—66 (англ.)

Основная мысль статьи состоит в утверждении, что понятия теории информации могут найти себе применение и за пределами задач передачи сообщений. В очень нечетком изложении автора говорится, повидимому, что эти понятия получают смысл и практическое значение всякий раз, когда речь идет об установлении статистической связи между двумя или большим числом полей вероятности (в теории информации это — множества возможных передаваемых и получаемых сообщений). Эта точка зрения не может считаться новой (см., например, статью референта, Успехи матем. наук, 1953, 8, № 3 (55), 3—20). Автор дает ряд иллюстраций своей идеи. Особенно детально рассматривается применение к промышленной продукции, где первое поле вероятностей порождается распределением какого-либо признака в сырье, а второе — распределением другого признака в готовом продукте. Энтропия объединенного поля рассматривается при этом как мера «неорганизованности» производства. В математическом отношении статья ничего нового не содержит. *А. Я. Хинчин*

2347. Генетико-статистический метод определения вероятных максимальных расходов воды. Алексеев Г. А., Тр. Гидрол. ин-та, 1954, № 43, 5—21

2348 п. Спектры и анализ. Харкевич А. А., Изд. 2-е, испр. и доп., 215 стр., М., Гостехиздат, 1953, 6 р. 20 к.

Дается теоретическое рассмотрение спектральных представлений функций времени, используемых в теории колебаний, радиотехнике и акустике, и разбор методов аппаратурного осуществления спектрального анализа. Книга предназначена для инженеров, преподавателей высшей школы и студентов, работающих в области радио- и акустики. Однако она представляет определенный интерес и для математика, поскольку дает возможность почувствовать конкретное физическое содержание спектрального анализа и вводит в круг вопросов радиотехники и акустики, где аппарат спектрального анализа является основным математическим аппаратом исследователя.

Книга состоит из двух глав. В главе «Спектры» излагаются понятия ряда и интеграла Фурье, приводятся некоторые формальные соотношения для спектральных функций без условий применимости (хотя сначала функции предполагаются удовлетворяющими условиям Дирихле и абсолютно интегрируемыми на $(-\infty, +\infty)$), спектры простейших модулированных колебаний, преобразование спектров при детектировании. Интересным является параграф, где вводится понятие текущего спектра

$$S_t(\omega) = \int_0^t f(\tau)\, e^{-i\omega\tau}\, d\tau.$$

Здесь связывается математическое понятие спектра с условиями реального эксперимента.

Далее рассматриваются спектры импульсов и связь между спектром одиночного импульса и периодической последовательностью таких импульсов. В частности, посредством формальных выкладок получается спектр δ-функции Дирака и ее производных.

Поясняется на примерах связь между длительностью импульса и протяженностью его спектра и вводится с помощью вторых моментов временной и спектральной функций понятие длительности импульса Δt и ширины его спектра Δf, а также указывается, что произведение $\Delta t\, \Delta f$ превосходит некоторую абсолютную постоянную. В параграфе, посвященном так называемой диаграмме (f, t), выясняются понятие емкости канала связи и вопросы, связанные с обратимостью преобразований частотного спектра сигнала и длительностью сигнала.

В последующих параграфах первой главы приводятся теорема Котельникова о возможности воспроизведения функций с ограниченным спектром по ее значениям в периодической последовательности временных точек, замечания о спектральной функции δ-функции Дирака и, наконец, понятие случайного процесса и связь между спектральной и корреляционной функциями стационарного случайного процесса, вытекающая из теоремы А. Я. Хинчина о стационарных случайных процессах.

В главе «Анализ» рассматриваются вопросы аппаратурного осуществления спектрального анализа временных функций. Следует заметить, что книга содержит значительное число математических погрешностей. *Я. И. Хургин*

См. также: 2055, 2083.

ГЕОМЕТРИЯ

2349. История принципа Даламбера. Крбек (Geschichte des Prinzips von d'Alembert. Krbek F. von), Wiss. Z. Univ. Greifswald. Math.-naturwiss., Reihe **2**, 1953, 15—22 (нем.)

2350. Замечательные точки треугольника на окружности Брокара и на прямой Лемуана. II. Тоскано (Points remarquables d'un triangle sur le cercle de Brocard et sur la droite de Lemol-

ne. II. Toscano L.), Bull. Soc. roy. sci., Liege, 1953, **22**, № 1, 47—65 (франц.)

Окончание статьи, помещенной в том же журнале (1952, № 12).

В плоскости треугольника ABC дана произвольная точка P. Прямые AP, BP, CP пересекают окружность, описанную около треугольника ABC, в точках A_1, B_1, C_1. Треугольник $A_1B_1C_1$ называется круговым подерным треугольником (circonpedal). Автор ставит задачу: найти точки, для которых треугольник $A_1B_1C_1$ равен данному треугольнику ABC.

Кроме известных точек, обладающих этим свойством, автор находит еще две новые точки Θ и Θ', свойства которых во многом аналогичны свойствам точек Брокара. Подробно изучается трапеция с вершинами в точках Брокара и в найденных точках Θ и Θ'. Определяется расстояние от найденных точек до других замечательных точек треугольника.

Рассматриваются интересные частные случаи.

С. И. Зетель

2351. Некоторые свойства трисектрис внутренних углов треугольника. Паолантонио (Alcune proprietà delle trisettrici degli angoli interni di un triangolo. Paolantonio Raffaele), Period. mat., 1953, **31**, № 4, 246—253 (итал.)

Дается новое доказательство теоремы Морлея (F. Morley): три точки, в которых пересекаются попарно трисектрисы внутренних углов треугольника, смежные одной стороне, являются вершинами равностороннего треугольника. Доказательство получается как следствие леммы:

Если α, β, γ — острые углы, ни один из которых не равен нулю и сумма которых равна шестой части окружности, то существует выпуклый шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ с заданной стороной A_1A_2 такой, что:

а) отрезки A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 имеют общую точку O',

б) $\sphericalangle A_1O'A_2 = \sphericalangle A_2O'A_3 = \sphericalangle A_3O'A_4 = \sphericalangle A_4O'A_5 = \sphericalangle A_5O'A_6 = \sphericalangle A_6O'A_1 = 60°$,

в) $A_1A_2 = A_1A_6$, $A_3A_2 = A_3A_4$, $A_5A_4 = A_5A_6$, $O'A_2 = O'A_4 = O'A_6$,

г) треугольник $A_2A_4A_6$ равносторонний,

д) $\sphericalangle A_2A_1A_4 = \sphericalangle A_6A_1A_4 = 30° + \alpha$, $\sphericalangle A_2A_3A_6 = \sphericalangle A_4A_3A_6 = 30° + \beta$, $\sphericalangle A_4A_5A_2 = \sphericalangle A_6A_5A_2 = 30° + \gamma$,

е) если обозначено $(A_5A_6,\ A_3A_2) = A'$, $(A_1A_2,\ A_5A_4) = B'$, $(A_3A_4,\ A_1A_6) = C'$,

то $\sphericalangle B'A'A_2 = \sphericalangle A_2A'A_6 = \sphericalangle A_6A'C' = \alpha$, $\sphericalangle A'B'A_2 = \sphericalangle A_2B'A_4 = \sphericalangle A_4B'C' = \beta$, $\sphericalangle B'C'A_4 = \sphericalangle A_4C'A_6 = \sphericalangle A_6C'A' = \gamma$.

Из этой же леммы следует: прямые, к которым принадлежат трисектрисы внутренних углов треугольника, являются касательными одного и того же конического сечения; три прямые, каждая из которых проходит через одну вершину треугольника и через точку пересечения двух трисектрис других вершин, более близких к этой вершине, пересекаются в одной точке.

Н. Г. Гаспарян

2352. О шести точках Сервэй тетраэдра. Мармьон (Sur les six points de Servais d'un tétraèdre. Marmion A.), Mathesis, 1953, **62**, 215—233 (франц.)

2353. Полуправильные многогранники. Кокстер, Лонге-Хиггинс (Uniform polyhedra. Coxeter H. S. M., Longuet-Higgins M. S., Miller J. C. P.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1954, **246**, ser. A916, 401—450+6 pls. (англ.)

Рассматриваются и строятся все известные полуправильные трехмерные многогранники, т. е. такие, грани которых — правильные многоугольники и у каждого из которых все комплексы сходящихся в вершине граней конгруэнтны друг другу или симметричны. Если, кроме того, все грани одинаковы — это правильный многогранник.

Как известно, выпуклых правильных многогранников — 5 (тела Платона), невыпуклых — 4 (тела Пуансо), выпуклых полуправильных многогранников, но не правильных — 13 (тела Архимеда) и еще две бесконечные серии призм и полупризм Архимеда. Сколько существует невыпуклых полуправильных, но не правильных многогранников, до сих пор неизвестно. Различные такие многогранники были найдены Бадуро (Badoureau, 1881), Пичем (Pitsch, 1881) и Федоровым (1885), некоторые другие были найдены авторами. Сейчас всего найдено 53 таких многогранника.

Авторы с 1932 г. задерживали публикацию своих результатов в надежде доказать, что других многогранников нет, но это им не удалось, хотя «они были бы весьма удивлены, если бы нашелся еще такой многогранник». Если это верно, то выходило бы, что всех полуправильных многогранников как выпуклых, так и невыпуклых (включая и правильные) $5 + 4 + 13 + 53 = 75$ и еще две бесконечные серии призм и полупризм Архимеда. Все эти многогранники изображены в статье на таблицах.

Б. Н. Делоне

2354. О некоторых окружностях и сферах Тюкера. Тебо (Sur des cercles et des sphères particuliers de Tücker. Thébault Victor), Mathesis, 1953, **62**, 111—119 (франц.)

2355. О некоторых кубических преобразованиях в пространстве кругов, связанных с педальными и контактными круговыми системами. III. Геометрия педальных и контактных круговых систем. Рангасвами (On certain cubic transformations in circle space associated with pedal and contact circle systems. III. Geometry of pedal and contact circle systems. Rangaswami Aiyer K.), J. Annamalai Univ., 1953, **18**, 163—172 (англ.)

2356. Об одной задаче инфинитезимальной геометрии. Гурматай (Sur un problème de géométrie infinitésimale. Goormaghtigh R., Mathesis, 1953, **62**, 99—102 (франц.)

2357. Аналагматические кривые 3-го порядка. До (Cubiques anallagmatiques. Deaux R.), Mathesis, 1953, **62**, 193—204 (франц.)

2358. Теорема о гомотетичных гиперэллипсоидах в n-мерном пространстве. Девиде (Jedan teorem o homoteti.kim hiperelipsoidima u n-dimenzionalnom prostoru. Devidé Vladimir), Glasn. mat.-fiz. i astron., 1953, **8**, № 3, 194—195 (хорв.; резюме нем).

Рассматриваются два подобных и подобно расположенных гиперэллипсоида $n-1$ измерения E_j ($i = 1,2$) в n-мерном пространстве. Показано существование двух точек, которые являются вершинами двух гиперконусов K_i ($i = 1,2$), касающихся обоих гиперэллипсоидов E_j вдоль $(n-2)$-мерных гиперэллипсоидов E'_{ij}, которые лежат в параллельных гиперплоскостях H_{ij}. Расстояние между гиперплоскостями H_{11}, H_{21} равно расстоянию между H_{12}, H_{22}. *С. И. Зетель*

ПРИЛОЖЕНИЯ ГЕОМЕТРИИ

2359. Кручение световой траектории в непрерывной изотропной преломляющей среде. Марусси (La torsione di una traiettoria luminosa in un mezzo rifrangente continuo isotropo. Marussi Antonio), Atti Fondaz. «Giorgio Ronchi», 1953, 8, № 2, 104—108 (итал.)

Отправляясь от одной задачи геодезии, автор решает задачу вычисления кручения световых траекторий в неоднородной, но изотропной среде. В основу кладутся формулы Френе и вытекающее из принципа Ферма соотношение между градиентом показателя преломления и кривизной траектории света. Если обозначить через $\nu = \ln n$ логарифм показателя преломления, через f модуль градиента ν, через θ угол между главной нормалью траектории и нормалью поверхности $n = \text{const}$, то для кручения τ траектории будет иметь место формула $\tau = \tau_g + \frac{1}{f} \operatorname{tg}\theta \operatorname{grad}_\Sigma f \cdot \mathbf{b}$, где $\operatorname{grad}_\Sigma f$ — составляющая градиента в касательной плоскости поверхности $n = \text{const}$, $\mathbf{b}$ — орт бинормали траектории, а τ_g — геодезическое кручение на поверхности $n = \text{const}$ в направлении, определенном ее нормальной плоскостью, касательной к траектории. $\mathbf{b}$ может быть найдено из $\mathbf{b} = \rho f [\mathbf{t}\,\mathbf{N}]$, где ρ — кривизна траектории, $\mathbf{t}$ — орт касательной к ней, $\mathbf{N}$ — орт нормали к $n = \text{const}$.

Автор вводит предположение о непрерывности показателя преломления, но фактически полагает, что существует $\operatorname{grad} |\operatorname{grad} \nu|$ и для траектории применимы формулы Френе. *В. В. Рыжков*

2360 Д. Геодезические измерения при построении и испытании мостов. Исследования их точности и хозяйственного значения с точки зрения строгости требований строительной техники. Фосс (Geodätische Messungen bei der Errichtung und Überprüfung von Brücken. Eine Unters. ihrer Genauigkeit u. Wirtschaftlichkeit im Hinblick auf d. Bautechn. Voss Ferdinand, Diss. Bonn. Landw. F., 1953, 94 Bl.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, № 17, 1433 (библ.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2361 К. Введение в плоскую проективную геометрию. Гопкинс, Хейлс (An introduction to plane projective Geometry. Hopkins E. J., Hails J. S., Oxford, at the Clarendon Press, 1953, VIII+276 (англ.)

Книга содержит шестнадцать глав: I. Основные элементы и аксиомы сочетания; II. Ортогональные проекции; III. Общие или конические проекции; IV. Однородные координаты и прямая линия; V. Перспективность и проективность; VI. Проективные преобразования; VII. Сложное отношение; VIII. Образование конических сечений; IX. Конические сечения: общие свойства; X. Специальные формы уравнений конических сечений; XI. Четырехсторонник и четырехвершинник; XII. Пучки конических сечений; XIII. Проективное соответствие на конических сечениях; XIV. Расстояния и углы; XV. Метрическая теория конических сечений; XVI. Поляритет.

Книга представляет элементарный учебник. Каждая глава сопровождается задачами. Параллельно проводится синтетическое и аналитическое изложение. *Н. М. Бескин*

2362 К. Что такое неевклидова геометрия. Александров П. С., 68 стр., Киев, изд-во «Рад. школа», 1953

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

2363. Бирациональные инволютивные преобразования, оставляющие инвариантными систему плоских кривых 3-го порядка, проходящих через 6 неподвижных точек. Годо (Transformations birationnelles involutives laissant invariant le système des cubiques planes passant par six point fixes. Godeaux L.), Mathesis, 1953, **62**, 85—89 (франц.)

2364. О кремоновых преобразованиях пространства, связанных с пучком поверхностей 6-го порядка. Дервидюэ (Sur des transformations crémoniennes de l'espace liées à un faisceau de surfaces du sixième ordre. Derwidué L.), Bull. Soc. roy. sci., Liège, 1953, **22**, 143—147 (франц.)

2365. О конгруенциях первого порядка прямых в S_4, собственное фокальное многообразие которых неприводимо. Готье (Sulle congruenze d'ordine uno di rette di S_4 la cui focale propria è orriducibile. Gauthier Luc), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 329—337 (итал.)

Конгруенцией в S_4 называется фигура, образованная прямыми из S_4, зависящими от трех параметров, так что через каждую точку проходит дискретная совокупность прямых. Порядком алгебраической конгруенции называется число прямых, проходящих через каждую точку. Геометрическое место фокусов прямых конгруенции (собственное фокальное многообразие конгруенции) является огибающей прямых конгруенции.

Ранее автором было доказано (Mém. soc. roy. sci. Liège, 1944, **13**, 191), что уравнение, определяющее фокусы на некоторой прямой g, обращается в тождество лишь в двух случаях: 1) g несет на себе более трех собственных фокусов, 2) три фокальные гиперплоскости принадлежат одному пучку (в S_3).

Прямые первого типа образуют особое фокальное многообразие, второго типа — специальное фокальное многообразие.

Для конгруенции первого порядка с различными фокусами на каждой прямой и с неприводимыми фокальными многообразиями: 1) собственное фокаль-

ное многообразие является алгебраической поверхностью F^n, для которой прямые g суть трисеканты; 2) особое фокальное многообразие представляет совокупность конечного числа плоскостей, секущих F^n по кривым не ниже четвертого порядка; 3) специальное фокальное многообразие состоит из конечного числа плоскостей, секущих F^n по кривым третьего порядка. Поэтому изучение таких конгруенций равносильно изучению в S_4 поверхностей, имеющих одну тройную точку. Эта проблема была решена Севери (Severi F., Rend. Palermo, 1901) в случае, когда F^n имеет только несобственные особенности. Уточняя результаты Севери, автор указывает в S_4 еще одну поверхность F^7 с тройной прямой Δ, нелинейчатую, являющуюся пересечением двух многообразий v_3^3, допускающих двойную прямую Δ и пересекающихся по квадрике F^2, проходящей через Δ. Поверхности F^7 и F^2 образуют базу пучка многообразий v_3^3. Все найденные поверхности рациональны; их можно рассматривать как части базы пучка многообразий v_3^3, из образующих которых и строятся соответствующие конфигурации первого порядка. *С. Д. Россинский*

2366. О максимальном числе узлов алгебраической поверхности. Сегре (Sul massimo numero di nodi delle superficie algebriche. Segre Beniamino), Atti Accad. Ligure, 1952, **9**, 15—22 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Попытка выяснить что-либо о функции $\mu(n)$, определяемой как максимальное число изолированных двойных точек алгебраической поверхности порядка n. Известно, что $\mu(1)=0$, $\mu(2)=1$, $\mu(3)=8$, $\mu(4)=16$. Бассетт (Bassett, Nature, 1906, **73**, 246; Quart. J. Pure Appl. Math., 1906, **38**, 63—83) показал, что

$$\mu(n) \leqslant \frac{1}{2}\{n(n-1)^2-5-[n(n-1)(3n-14)+25]^{1/2}\}.$$

В настоящей работе преобразование

$$x_0' : x_1' : x_2' : x_3' = x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_3^2 \qquad (1)$$

употребляется для построения поверхности порядка $2n$ с большим числом двойных точек, если известна поверхность порядка n с максимальным числом их; отсюда во всяком случае следует, что

$$\mu(2n) > 8\mu(n).$$

Автор без доказательства приводит теорему о том, что максимальное число двойных точек алгебраической поверхности, для которой а) число трикасательных плоскостей конечно, б) параболическая и флекнодальная кривые не имеют общей части, удовлетворяет неравенству

$$d_n \leqslant \frac{1}{12}[7n^3-18n^2+11n-54-(n^6-12n^5+46n^4+ \\ +336n^3-2639n^2+3420n+2916)^{1/2}].$$

Если считать, что $d_n=\mu(n)$, то отсюда следует, что $\mu(5)\leqslant 31$, $\mu(6)\leqslant 63$. Так как автор построил посредством преобразования (1) поверхность шестого порядка с 63 узлами, а Тольятти (Togliatti, Vierteljahrschr. naturforsch. Ges. Zürich., 1940, 85, Beiblatt, 127—132) нашел поверхность пятого порядка с 31 узлом, то представляется вероятным, что $\mu(5)=31$, $\mu(6)=63$.

Относительно $\mu(7)$ ничего не сказано. Применяя (1) к поверхности Куммера, автор получил поверхность восьмого порядка с 153 узлами; это число повысилось бы до 160, если бы было возможно построить поверхность Куммера, вписанную в тетраэдр референции и описанную около него и касающуюся его ребер, что представляется допустимым после грубого подсчета констант. Однако верхняя граница для $\mu(8)$ равна 175.

Формула Бассетта и соотношение $\mu(2n)>8\mu(n)$ показывают, что если $\mu(n)/n^h$ стремится к пределу k, когда n стремится к бесконечности, то должно быть $h=3$ и для всех n $\mu(n)/n^3<k<1/2$. В этом предположении мы находим нижнюю границу для k: $k>153/512$, если $\mu(8)\geqslant 153$, и $k>5/16$, если $\mu(8)\geqslant 160$. *P. Du Val*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 249.

Примечание редакции. Формула Бассетта дает $\mu(8)\leqslant 181$, а предположение $\mu(n)<d_n$ (откуда, в частности, $\mu(5)\leqslant 31$ и $\mu(6)\geqslant 63$) дает $\mu(8)\leqslant 180$.

2367. О двух квадратичных комплексах, ассоциированных системе векторов. До (Sur deux complexes quadratiques associés à un système de vecteurs. Deaux R.), Mathesis, 1953, **62**, 102—110 (франц.)

2368. Некоторые соображения по поводу одной заметки Сегре. Галларати (Alcune riflessioni intorno ad una nota del prof. B. Segre. Gallarati Dionisio), Atti Accad. Ligure, 1952, **9**, 106—112 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (итал.)

Работа представляет краткий комментарий к статье Сегре (см. реф. 2366). Преобразование $\rho y_i = x_i^p$ $(i=0,\ldots,r)$ применяется так же, как в частном случае $r=3$, $p=2$ у Сегре. В частности, при $r=4$, $p=2$ из квадрики общего вида, вписанной в симплекс референции, получается поверхность четвертого порядка в S_4 с 40 узлами. Показывается, что касательный конус в каждом из этих узлов имеет его вершиной и не проходит ни через какой другой узел, следовательно, видимый из какого-либо узла контур этой поверхности есть поверхность шестого порядка с 63 узлами (39 получаются из остальных узлов и 24 от линий на поверхности, проходящих через рассматриваемый узел). Неясно, та же ли это поверхность, что поверхность, указанная Сегре, или нет.

В заключение применением преобразования к поверхности заданного порядка с максимальным числом узлов и рассмотрением тетраэдра референции, в который вписана поверхность, неравенство $\mu(2n)>8\mu(n)$ уточняется до $\mu(2n)\geqslant 8\mu(n)+16$, после чего нижняя граница для $\lim_{n\to\infty}\mu(n)/n^3$, полученная Сегре в виде $153/512$, незначительно улучшается до $153/512+1/224$. *P. Du Val*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 3, 250.

2369. Новые методы и результаты в геометрии на алгебраическом многообразии. Сегре (Nuo-

vi metodi e risultati nella geometria sulle varietà algebriche. Segre Beniamino), Ann. mat. pura ed appl., 1953, **35**, 1—127 (итал.)

Развивается своеобразный алгебраический метод изучения геометрии на неприводимом несингулярном алгебраическом многообразии (м.) V над полем комплексных чисел. Многообразию V относят некоторое коммутативное, частично упорядоченное кольцо $\mathfrak{A}_V$ — кольцо эквивалентности,— и в нем рассматривают последовательности м., в особенности так называемые ковариантные последовательности (к. п.). Результаты применяются к теории пересечений и к построению канонических м. Указываются многочисленные связи полученных результатов с уже известными. Выводы даны подробно и занимают порой несколько страниц текста.

Пусть $M, N, \ldots$ — чистые м. на V; $m, n, \ldots$ — их размерности. Абелева группа Γ_V всех виртуальных (абстрактных) м. на V, т. е. символов вида $\sum \mu_i M_i$, где μ_i — целые числа, разлагается в прямую сумму групп Γ_V^m, порожденных чистыми м. размерности m. На V рассматривается $v-m$ виртуальных линейных систем гиперповерхностей $|A^i|$, выбранных так, что пересечения их суть чистые м. размерности m. Совокупность этих пересечений (элементарная система) определяет подгруппу Ω_V^m группы Γ_V^m; элементы фактор-группы $\mathfrak{C}_V^m$ называются системами эквивалентности, их прямая сумма $\mathfrak{C}_V$ — модулем эквивалентности. Для систем эквивалентности сохраняются обозначения $M, N, \ldots$; для представителей классов — $\langle M\rangle, \langle N\rangle, \ldots$; знак $=$ употребляется в смысле равенства классов, $\doteq$ — в смысле равенства выбранных представителей.

Введением операции пересечения (произведения) MN, распространяемой по закону дистрибутивности на виртуальные м., группа $\mathfrak{C}_V$ обращается в кольцо $\mathfrak{A}_V$. Аналогичные кольца можно определить и для подмногообразий на V. Для трех (и более) м. P, M, N, где P — простая часть пересечения M и N и M, N проходят через P производящим образом, определяются операции с тремя (и более) терминами: $Q \doteq \doteq \langle MN\rangle$—$P$ называется символическим произведением M и N на V относительно P: $Q = (MN)_V^P$; $E = (MN)_V -$ $- (MN)_V^P$ — функциональный эквивалент P в пересечении M и N и $R = \langle PQ\rangle$ — м. касания (d'appoggio) P и Q.

Последовательностью м. с основанием P называется последовательность $\{P\} = P_0, P_1, P_2, \ldots$ элементов $\mathfrak{A}_P$, где $P_0 = P$, размерности $P_i = p - i$, $P_i = 0$ при $p - i < 0$. С ней однозначно сопоставляется формальный степенной ряд $[\{P\}, x] = \sum_0^\infty P_i x^i$, при посредстве которого определяются действия с последовательностями, обратная последовательность $\{\bar{P}\} = \{P\}^{-1}$ и альтернанта $\{\bar{P}\}$ (последняя по формуле $[\{\bar{P}\}, x] = [\{P\}, -x]$). В частности, выбор s гиперповерхностей A^i определяет на V последовательность $\{V\}$ с элементами $V_i^s(A)$ посредством формулы $[\{V\}], x] = \Pi\ (1 + A^i x)$.

Если P неприводимо и несингулярно, то формула $(A^1 \ldots A^s)_V - (A^1 \ldots A^s)_V^P = \sum P_{V,i} V_{l-i}^s (A)$ определяет последовательность $P_{V,i}$; ее элементы независимы от выбора проходящих через P гиперповерхностей A^i и инвариантно связаны с P. Она называется к. п. вложения P в V. Основные свойства к. п. даются тремя теоремами: теоремой о принадлежности (если $P \subset M \subset V$, то $\{P\}_V = (\{P_M\} \cdot \{M_V\})_M$, теоремой сечения (если P и V' пересекаются по неприводимому и несингулярному м. P', то пересечение V' с к. п. P в V совпадает с к. п. P' в V') и теоремой произведения (к. п. в V произведения м. совпадает с произведением в V к. п. факторов). Построение к. п. м. P может быть сведено к определению характеристической последовательности гиперповерхности P', получающейся из P, если V подвергнуть дилатации с основанием P; однако для этого построения достаточно выполнения некоторых операций в $\mathfrak{A}_V$. Основная задача: зная, как строится N из м. M^i в кольцах $\mathfrak{A}_M$, $\mathfrak{A}_V$, выразить к. п. N через к. п. M^i. Она представляет большие алгоритмические трудности и решается лишь для случаев, когда N — сумма произвольного числа гиперповерхностей или разность двух гиперповерхностей.

Применительно к вопросам теории пересечений устанавливаются выражения функционального эквивалента и м. касания в виде $E = P_t^0$, $R = P_{t+1}^2$, где $t = p + v - m - n$, а $\{P^0\} = (\{P_M\} \cdot \{P_N\}\ \{\widetilde{P}_V\})_P$. К. п. м. R определяется эквивалентностью $R_{Q,k} = P_{t+k+1}^0$; к. п. м. Q определяется только для случая правильного пересечения M и N.

Затем рассматриваются прямые произведения (п.п.) м. Здесь п.п. систем эквивалентности дает систему эквивалентности п. п. и поэтому перенос введенных ранее понятий на случай п.п. производится весьма просто. Особое значение имеет рассмотрение диагонального м. (обобщение м. Веронезе), которое строится так: рассматривается п.п. V s копий м. V^1; точки этих м., соответствующие одной и той же точке V^1, называются сопряженными. Геометрическое место наборов сопряженных точек V называется диагональным м. V^Δ. Диагональное м. важно потому, что к его изучению сводятся некоторые проблемы пересечения, а особенно потому, что с его помощью возможно построение новых последовательностей, инвариантных относительно всех бирациональных преобразований. Именно, построив, как выше, V^Δ, определив его к. п. вложения $\{V_V^\Delta\}$, можно отобразить ее на V^1. Полученная последовательность $\{V_{\{s\}}^1\}$ будет инвариантной. В частности, при $s = 2$ так получается некоторая инвариантная последовательность $\{V\}$; последовательность, обратная ее альтернанте $\{V^*\} = \{\bar{\bar{V}}\}$ называется канонической, а ее элемент V_i^* i-м каноническим м. для V. Связь между каноническими м. и к. м. вложения устанавливается формулой $\{P^*\} = (\{\bar{P}_V\} \cdot \{V^*\})_V$. Показывается тождественность нового алгебраического определения канонических м. и определения их в классическом смысле.

Многочисленные результаты частного характера (канонические м. пересечения гиперповерхностей, обобщение формулы Нетера, геометрическое место несобственных двойных точек, якобиевы м., м. в проективном пространстве и т. д.) иллюстрируют

возможность приложений развитого в работе метода. *В. В. Морозов*

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

2370. К бесквадратурному представлению действительных изотропных кривых. Ара, Пинл (Zur integrallosen Darstellung reeller isotroper Kurven. Ara Rahmat, Pinl M.), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 3/4, 204—209 (нем.)

Известный метод разыскания изотропных кривых в R_3, как ребра возврата огибающей однопараметрического семейства изотропных плоскостей, распространяется авторами на многомерные псевдоевклидовы пространства R_n индекса $\tau > 0$. Используя существующие в псевдоевклидовых пространствах действительные изотропные плоскости, находят бесквадратурные представления действительных изотропных кривых для случаев: 1) $n = 3$, $\tau = 1$; 2) $n = 4$, $\tau = 1$; 3) $n = 4$, $\tau = 2$. В случаях 1) и 2) представления содержат одну, а в случае 3) две произвольные функции параметра. Найденные представления трактуются авторами так же, как уравнения линий откоса соответствующих собственно евклидовых пространств. *И. В. Цыганков*

2371. Заметка о прямолинейных конгруенциях. Джха, Чариар (A note on rectilinear congruences. Jha P., Chariar V. R.), Math. Student, 1953, **21**, № 3, 4, 81—86 (англ.)

Даются новые доказательства трех следующих теорем Мишры (Mishra, Rev. fac. sci. univ. Istambul, 1951, **A 16**, № 2):

1) Сумма параметров распределения двух линейчатых поверхностей конгруенции (проходящих через данный луч конгруенции), стрикционные линии которых лежат на исходной поверхности конгруенции, равна сумме главных параметров распределения.

2) Разность параметров распределения двух линейчатых поверхностей конгруенции, стрикционные линии которых лежат на исходной поверхности конгруенции, не может быть больше, чем разность главных параметров распределения.

Везде термин «наложимы» следует понимать в смысле «имеют в точке пересечения общий линейный элемент».

3) Если стрикционные линии двух линейчатых поверхностей конгруенции лежат на исходной поверхности конгруенции и совпадают с асимптотическими линиями последней, то данная конгруенция есть конгруенция нормалей к исходной поверхности.

К этим предложениям авторы добавляют следующие:

4) Линейчатые поверхности конгруенции нормалей к заданной поверхности, стрикционные линии которых лежат на этой поверхности, — наложимы друг на друга.

5) Линейчатые поверхности конгруенции нормалей к заданной поверхности, стрикционные линии которых лежат на этой поверхности, касаются друг друга в их центрах кривизны.

6) Если линейчатые поверхности конгруенции, стрикционные линии которых лежат на исходной поверхности, наложимы друг на друга, то данная конгруенция нормальная.

7) Если лучи нормальной конгруенции пересекают поверхность под произвольными углами и линейчатые поверхности конгруенции, стрикционные линии которых лежат на этой поверхности, наложимы друг на друга, то линия, ортогональная к лучам конгруенции, делит пополам угол между стрикционными линиями в каждой точке. *М. В. Потоцкий*

2372. Основные уравнения, которые должны удовлетворяться коэффициентами квадратичных форм Санния. Бхаттачария, Бехари (Fundamental equations of condition to be satisfied by the coefficients of Sannia's quadratic forms. Bhattacharya P. B., Behari Ram), Ganita, 1953, **4**, 13—17 (англ.)

Авторы восстанавливают в тензорной форме условия, которым удовлетворяют коэффициенты квадратичных дифференциальных форм Куммера прямолинейной конгруенции, и снова находят условия, которым должны удовлетворять коэффициенты системы двух квадратичных дифференциальных форм; этой системой Санния заменил систему Куммера. *P. Vincensini*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 157.

2373. О некоторых поверхностях, к точкам которых присоединены вырожденные квадрики. Годо (Sur certaines surfaces aux points desquelles sont associées des quadriques dégénérées. Godeaux Lucien), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, **22**, 139—142, 211—217 (франц.)

ГЕОМЕТРИЯ *n*-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА. ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

2374. Преобразования Лоренца не образуют в общем случае «группы». Физический смысл этого свойства. Мец (Les transformations de Lorentz ne forment pas, en général, un «groupe». Signification physique de cette propriété. Metz André), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 1, 29—31 (франц.)

Пусть переход от системы отсчета S к системе отсчета S' совершается при помощи преобразования Лоренца $L(v)$, а переход от системы S' к системе S'' — при помощи преобразования Лоренца $L(v')$. Показано, что если v' непараллельно v, то результирующее преобразование $L(v') \cdot L(v)$ необходимо содержит в себе вращение пространственных осей системы S'' относительно пространственных осей системы S. *Ю. Р.*

2375. Образуют ли группу преобразования Лоренца? Лалан (Les transformations de Lorentz forment-elles un groupe? Lalan Victor), Ann. phys., 1953, **8**, sept.— oct., 653—661 (франц.)

Рассматриваются специальные преобразования Лоренца, т. е. такие преобразования, которые получаются из канонического преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - v'c^2x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (1)$$

в результате трансформации его при помощи пространственного вращения. Специальные преобразования Лоренца образуют трехпараметрическое семейство.

В качестве параметров, определяющих специальное преобразование Лоренца, связывающее координаты

в двух системах S и S', можно принять составляющие по осям xyz системы S скорости системы S' относительно S. Существенное свойство специальных преобразований Лоренца состоит в том, что если скорость системы S' относительно S задается в осях xyz системы S составляющими v_1, v_2, v_3, то скорость системы S относительно S' задается в осях $x'y'z'$ системы S' составляющими $-v_1, -v_2, -v_3$. Преобразования вида (1), очевидно, являющиеся специальными, образуют однопараметрическую группу (параметр v). Автор дает элементарное доказательство того факта, что трехпараметрическое семейство всех специальных преобразований Лоренца не образует группы. *Ю. А. Гольфанд*

2376. Уравнения движения в новой обобщенной теории поля Эйнштейна. К а л л а в е й (The equations of motion in Einstein's new unified field theory. C a l l a w a y J o s e p h), Phys. Rev., 1953, **92**, № 6, 1567—1570 (англ.)

Как известно, в общей теории относительности уравнения поля $R_{ik} = 0$ определяют уравнения движения частиц (сингулярностей поля). В обобщенной теории законы движения определяются уравнениями $R_{ik} = 0$, $R_{ik,\,l} + R_{kl,\,i} + R_{li,\,k} = 0$. Если частицы не заряжены, то в обеих теориях получаются одинаковые законы движения. В случае же заряженных частиц в обобщенной теории можно ожидать новых членов в уравнениях движения, обусловленных зарядами частиц. Определение этих добавочных членов и является целью автора.

Рассматривается случай медленно движущихся заряженных частиц, взаимодействие между которыми является преимущественно электростатическим. Для этого случая находятся решения уравнения поля в так называемом квазистатическом приближении, которые при достаточно большом расстоянии от частицы определяют электромагнитное поле медленно движущихся зарядов в обычном смысле. Затем, следуя Инфельд, каждая частица окружается некоторой замкнутой поверхностью произвольной формы, но в таком удалении от частицы, что на поверхности поле описывается с достаточной точностью вышеуказанными решениями уравнений поля. Искомые добавочные члены в уравнениях движения зависят от некоторых взятых по названным поверхностям интегралов от функций, составленных из решений уравнений поля. Оказывается, что в данном приближении все рассматриваемые поверхностные интегралы исчезают тождественно, так что добавочных членов, обусловленных электромагнитным полем, в уравнениях движений не получается. С другой стороны, из общей теории относительности известно, что в рассматриваемом приближении уравнения движения должны содержать произведения зарядов $e_i e_k$, т. е. члены, зависящие от электромагнитного поля. Отсюда автор делает вывод, что в обобщенной теории из уравнений поля невозможно вывести правильные уравнения движения заряженных частиц, в особенности уравнения Лоренца для движения заряженных частиц в электромагнитном поле. *Х. П. Керес*

2377. Линейная связность в пространстве спин-коллинеаций. И н г р е х э м (Linear connection in spin-collineation space. I n g r a h a m R i c h a r d L.), Math. Z., 1953, **58**, № 3, 265—271 (англ.)

В пространстве аффинной связности $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}$ рассматриваются некоторые формальные конструкции. Вводится ковариантное дифференцирование по собирательному индексу

$$\Phi = [\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_p] \quad (p = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

определяемое формулой

$$\nabla_{\Phi} = \nabla_{[\varphi_1} \nabla_{\varphi_2} \ldots \nabla_{\varphi_p]},$$

и выясняются его формальные свойства (в случае $p = 0$ полагаем $\nabla_{\Phi} = 1$).

Рассматривается система, состоящая из произвольно выбранных скаляра, вектора, бивектора, ... n-вектора, координаты которых обозначаются через V^{Φ} (здесь Φ имеет прежний смысл). К системам V^{Φ} применяется ковариантное дифференцирование (в том числе и по собирательному индексу Φ') путем дифференцирования составляющих V^{Φ} поливекторов по отдельности. Результат обозначается $\nabla_{\Phi'} V^{\Phi}$. При наличии в пространстве римановой метрики системы V^{Φ} можно трактовать, как известно, как элементы клиффордовой алгебры (при этом к каждой точке пространства будет привязано по экземпляру клиффордовой алгебры). Так как элементы клиффордовой алгебры можно изобразить (в случае $n = 2\nu$) линейными преобразованиями в спинорном пространстве 2^{ν} измерений — автор называет эти линейные преобразования спин-коллинеациями, — то ковариантное дифференцирование систем V^{Φ} можно трактовать как ковариантное дифференцирование спин-коллинеаций. При этом произвольную линейную комбинацию ковариантных производных по собирательным индексам $W^{\Phi'} \nabla_{\Phi'} V^{\Phi}$ можно истолковать как спин-коллинеацию, представляющую собой ковариантную производную спин-коллинеации, отвечающей V^{Φ} по спин-коллинеации, отвечающей $W^{\Phi'}$. *П. К. Рашевский*

2378. Тяготение и космическое расширение в конформном пространстве — времени. Г ю р с е й (Gravitation and cosmic expansion in conformal space-time. G ü r s e y F e z a), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1953, **49**, ч. 2, 285—291 (англ.)

Продолжая работы Инфелда и Шилда (Infeld L., Schild A., Phys. Rev., 1945, сер. 2, **68**, 250; 1946, сер. 2, **70**, 410), автор рассматривает четырехмерное пространство — время с конформно евклидовой метрикой:

$$ds^2 = u^2 d\tau^2,$$

где

$$d\tau^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2; \quad x^0 = ct.$$

Уравнение, определяющее тензор энергии — импульса по Эйнштейну

$$-\varkappa T_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \qquad (1)$$

заменяется уравнением, которое получается из (1) свертыванием с $g^{\mu\nu}$

$$\varkappa T = R. \qquad (2)$$

Здесь $R_{\mu\nu}$ — тензор Риччи, $R = R_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$, $T = T_{\mu\nu}g^{\mu\nu}$, $\varkappa$ — константа. Таким образом, с метрикой связан лишь след тензора энергии — импульса $T_{\mu\nu}$.

Обозначим $\square = \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu$, где $\eta_{\mu\nu}$ — метрический тензор псевдоевклидовой метрики $d\tau^2$. Тогда

$$R = 6u^{-3}\square u,$$

и в случае «пустого» пространства (2) дает $\square u = 0$.

Если положить $u = 1 - \lambda/r$, где

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},$$

то для слабых полей и малых скоростей мы приходим к ньютонову полю тяготения, порождаемому массой $M = \lambda c^2/G$, где G — гравитационная константа (четырехмерные траектории свободных частиц, как и в теории Эйнштейна, считаются геодезическими линиями).

Дальнейшие подсчеты автора показывают, что теория не соответствует экспериментальным данным: вращение перигелия Меркурия получается в половинном размере против истинного, а отклонение световых лучей, проходящих вблизи тяготеющего тела, не получается вовсе (так как изотропные геодезические — всегда прямые линии).

Тем не менее автор рассматривает свою теорию как «приближение» к более точной теории Эйнштейна.

В заключение конструируется пространство — время с метрикой

$$ds^2 = e^{-2ht}\,[c^2dt^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2],$$

которое, на основе весьма произвольных толкований и выводов, автор считает моделью «расширяющейся вселенной» с постоянной средней плотностью материи. *П. К. Рашевский*

2379. Теория сферически симметричного пространства — времени. VII. Пространства — времена с соответствующими геодетиками. Такено, Икеда (Theory of the spherically symmetric space-times. VII. Space-times with corresponding geodesics. Takeno Hyôitirô, Ikeda Mineo), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A17**, № 1, 75—81 (англ.)

Методы изучения сферически симметричных пространств, разработанные Такено в ряде предшествующих работ (РЖМат, 1954, 3448, 3822), применяются в настоящей работе к изучению геодезического соответствия двух римановых пространств, одно из которых сферически симметричное. Доказана теорема, обобщающая известную теорему Бельтрами о пространствах постоянной кривизны: Четырехмерное риманово пространство с сигнатурой — 2, находящееся в геодезическом соответствии со сферически симметричным пространством, само является сферически симметричным.

Из доказательства вытекает, что стандартная сферически симметричная координатная система для одного из этих пространств не будет, вообще говоря, даже просто сферически симметричной для другого пространства, соответствие с которым реализуется путем равенства координат соответствующих точек. Авторы исследуют далее вопрос о том, в каких случаях сферически симметричная система координат для одного из этих пространств будет сферически симметричной и для другого. В заключение доказано, что если у двух сферически симметричных пространств, находящихся в геодезическом соответствии, существует общая сферически симметричная система координат, то можно установить такое соответствие между их характеристическими системами, что эта система координат сделается стандартной для обеих характеристических систем. Авторы указывают, что они могут обобщить свои результаты на n-мерный случай. *Б. Л. Лаптев*

2380. Заряженная элементарная частица со спином 1. Доннерт (Geladene Elementarteilchen mit Spin 1. Donnert Hermann), Z. Phys., 1953, **136**, № 3, 331—343 (нем.)

При описании частицы со спином 1 уравнениями Прока возникают некоторые трудности в теории этих частиц. Автор предлагает вместо уравнений Прока описывать частицу со спином 1, движущуюся в заданном электромагнитном поле, уравнениями

$$\left.\begin{aligned} d_m G_{mn} &= \varkappa^2 A_n, \\ G_{mn} &= d_m A_n - d_n A_m + \\ &+ \frac{1}{2}\,\delta^{uv}_{mn}\,(d_u A_v - d_v A_u), \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

$$d_m = \frac{\partial}{\partial x_m} - \frac{ie}{\hbar c}\,\Phi_m,$$

Φ_m — потенциал внешнего электромагнитного поля, δ^{uv}_{mn} — единичный антисимметричный тензор.

Подробно исследуются свойства уравнений (1) и показывается, что ряд трудностей прежней теории удается устранить. *Ю. А. Гольфанд*

2381. О константах движения для случая нелокального взаимодействия. Оно (On the constants of motion for the case of non-localized interactions. Ôno Yôrô), Progr. Theoret. Phys., 1953, **10**, № 2, 125—136 (англ.)

В ряде работ была развита теория форм-фактора для нелокального взаимодействия полей. S-матрица в такой теории не содержит бесконечностей. Однако благодаря нелокальному характеру взаимодействия тензор энергии — импульса и вектор плотности тока не подчинялись уравнению непрерывности, и поэтому полная энергия и заряд системы не являлись константами движения. Автор развивает новый способ получения тензора энергии — импульса и вектора плотности тока, удовлетворяющих уравнениям непрерывности. Лагранжиан взаимодействия спинорного и скалярного поля берется в форме

$$L'(x) = \int \bar{\psi}(x)\,\Phi(x - x', x - x'')\,u(x')\,\psi(x'')\,dx'\,dx''.$$

Для форм-фактора $\Phi(x, y)$ автор дает представление весьма общего вида. Из функции действия получаются выражения для тензора энергии — импульса и вектора плотности тока, отличные от полученных ранее, благодаря применению процедуры варьирования по компонентам гравитационного потенциала, предложенной автором. При этом вектор полного импульса — энергии и полный заряд оказыва-

ются константами движения. Для случая локального взаимодействия, которому соответствует

$$\Phi = \delta(x - x')\,\delta(x - x''),$$

все полученные выражения переходят в обычные.

Ю. А. Голфанд

2382. **О конформно-инвариантных уравнениях поля тяготения. Букдал** (On a set of conform-invariant equations of the gravitational field. Buchdahl H. A.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1953, сер. 2, **10**, 16—20 (англ.)

Рассматривается пространство общей теории относительности с метрическим тензором $g_{\lambda\mu}$. Если K есть инвариант, составленный из $g_{\lambda\mu}$ и их производных, то, как известно, гамильтоновой производной инварианта K называется тензор $P^{\lambda\mu}$, входящий в соотношение

$$\delta\int K\sqrt{-g}\,d\tau = \int P^{\lambda\mu}\delta g_{\lambda\mu}\sqrt{-g}\,d\tau.$$

Здесь $\sqrt{-g}\,d\tau$ — элемент объема; интеграл берется по произвольной пространственной области и варьируется за счет произвольной вариации $\delta g_{\lambda\mu}$ метрического тензора $g_{\lambda\mu}$ (при условии, что $\delta g_{\lambda\mu}=0$ на границе области). В дальнейшем K — конкретный инвариант,

$$K = 3G_{\mu\lambda}G^{\mu\lambda} - G^2,$$

где $G_{\mu\lambda}$ — тензор Риччи, $G = G^{\mu}_{\mu}$; $P^{\lambda\mu}$ — гамильтонова производная от K. Доказывается, что для всякого конформно-эйнштейнова пространства $P^{\lambda\mu}=0$. С этой целью рассматривается инвариант

$$\overline{K} = C_{\mu\nu\sigma\rho}C^{\mu\nu\sigma\rho},$$

где $C_{\mu\nu\sigma\rho}$ — тензор конформной кривизны, и показывается, что $\overline{P}^{\lambda\mu} = P^{\lambda\mu}$ (где $\overline{P}^{\lambda\mu}$ — гамильтонова производная от $\overline{K}$). Так как интеграл $\int\overline{K}\sqrt{-g}\,d\tau$ конформно-инвариантен (при $n=4$), то обращение в нуль $\overline{P}^{\lambda\mu}$ (или, что то же, $P^{\lambda\mu}$) — факт конформно-инвариантный. Для эйнштейновых пространств (т. е. при $G_{\rho\sigma}=\lambda g_{\rho\sigma}$), как ранее показано автором (Proc. Nat. Acad. Sci., 1948, **38**, 66), $P^{\lambda\mu}=0$; следовательно, то же верно и для конформно-эйнштейновых пространств.

Далее показано, что для пространств со сферической симметрией

$$ds^2 = -e^{\mu(\rho)}d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + e^{\nu(\rho)}dt^2$$

условие $P^{\lambda\mu}=0$ не только вытекает из условия конформной эйнштейновости, но и влечет его за собой. При этом метрика имеет вид

$$ds^2 = [-\gamma^{-1}d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\,d\varphi^2) + \gamma\,dt^2]\,\psi(\rho),$$

где

$$\gamma = 1 - (2m/\rho) - (\lambda\rho^2/3)\ \ (m,\ \lambda \text{ — константы}),$$

$\psi(\rho)$ — произвольная функция ρ.

П. К. Рашевский

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

2383. **Некоторые теоремы для овалов, родственные теореме о четырех вершинах овала. Оман** (Einige dem Vierscheitelsatz verwandte Sätze über Eilinien. Ohmann D.), J. reine und angew. Math., 1953, **192**, № 2, 74—76 (нем.)

Пусть $h(\varphi)$ — опорная функция овальной линии C и функция

$$y(\varphi) = \sum_{\mu,\nu} a_{\mu\nu}h^{(\mu)}(\varphi + \alpha_\nu),\ \left(h^{(\mu)} = \frac{d^\mu h}{d\varphi^\mu}\right)$$

или

$$y(\varphi) = \sum_{\mu}\int_0^{2\pi} a_\mu(\psi)\,h^{(\mu)}(\varphi+\psi)\,d\psi$$

не зависит от выбора начала. Тогда $y(\varphi)$ принимает свое среднее значение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} y(\varphi)d\varphi$$

по меньшей мере четыре раза, а при условии $y(\varphi)+y(\varphi+\pi)=\text{const}$ — по меньшей мере шесть раз. При помощи этого предложения доказывается: 1) среди всевозможных описанных вокруг C четырехугольников с постоянными углами имеется по меньшей мере четыре, описанных вокруг окружности; 2) среди всевозможных описанных вокруг C многоугольников с заданными внешними углами α_ν имеется по меньшей мере четыре с периметром $L\Sigma\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha_\nu}{2}$ (L — длина C); 3) среди всех дуг линии C с полной кривизной α имеется по меньшей мере четыре с длиной $\frac{\alpha}{2\pi}L$. Для овалов постоянной ширины минимальное число объектов, указанных в теоремах 1), 2), 3), увеличивается до шести. Если называть противоположными точками овала точки, в которых касательные параллельны, то для всякого овала можно указать минимум три пары точек, делящих овал на две части равной длины. Результаты обобщаются на объекты, связанные с двумя овальными линиями.

Э. Г. Позняк

2384. **Проблема Вейля и проблема Минковского в дифференциальной геометрии «в целом». Ниренберг** (The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large. Nirenberg Louis), Communs Pure and Appl. Math., 1953, **6**, № 3, 337—394 (англ.)

Сущность проблемы Вейля заключается в следующем. Пусть на сфере или на многообразии, гомеоморфном сфере, задана метрика линейным элементом ds^2 с положительной гауссовой кривизной. Существует ли замкнутая выпуклая поверхность, реализующая эту метрику в том смысле, что при подходящей параметризации ее линейный элемент совпадал бы с заданным (ds^2)? Решение этой проблемы для случая аналитической метрики ds^2, заданной на сфере, намечено самим Вейлем и сведено им к доказательству следующих трех утверждений:

а) существует семейство метрик ds_t^2 $(0\leqslant t\leqslant 1)$ с положительной кривизной, заданных на сфере, ана-

литически зависящих от параметра t, содержащее метрику сферы ds_0^2 при $t=0$ и заданную метрику ds^2 при $t=1$;

б) если метрика $ds_{t_0}^2$ реализуема аналитической замкнутой выпуклой поверхностью, то все метрики ds_t^2 для t, близких к t_0, также реализуемы. Иначе говоря, множество реализуемых метрик семейства $\{ds_t^2\}$ открыто;

в) если метрики $ds_{t_k}^2$ реализуемы, а t_k сходятся к t_0, то метрика $ds_{t_0}^2$ тоже реализуема, т. е. множество реализуемых метрик семейства $\{ds_t^2\}$ замкнуто.

Из этих трех утверждений получается решение проблемы. В работе Вейля не содержится полного доказательства утверждений б) и в). Этот пробел был устранен позже в работах Г. Леви.

Проблеме Вейля посвящено много работ. Принципиально новое решение проблемы получено А. Д. Александровым; оно отличается предельной общностью, не предполагается регулярности метрики, требуется только, чтобы она была выпуклой. Остюда с помощью теоремы референта о регулярности выпуклой поверхности с регулярной метрикой получается теорема о реализации регулярной метрики с положительной кривизной регулярной поверхностью.

Автор дает подробное решение проблемы Вейля, основанное на идее Вейля (см. п. а), б), в)). При доказательстве п. б) в отличие от Вейля применяется метод последовательных приближений, что позволяет не предполагать аналитичности заданной на сфере метрики ds^2. Достаточно, чтобы коэффициенты формы ds^2 имели производные до четвертого порядка, удовлетворяющие условию Гельдера. В доказательстве п. в) существенно используется полученная Вейлем априорная оценка для средней кривизны замкнутой выпуклой поверхности через величины, характеризующие только ее внутреннюю метрику, и теорема о регулярности решений уравнений эллиптического типа, улучшенная автором.

Вторая часть работы содержит решение проблемы Минковского. Пусть $K(n)$ — гауссова кривизна замкнутой выпуклой поверхности в точке с нормалью n. Известно, что функция $K(n)$ удовлетворяет соотношению

$$\int K(n)\, n\, d\omega(n) = 0, \qquad (1)$$

где интегрирование ведется по единичной сфере. Проблема Минковского состоит в следующем. Пусть $K(n)$ — положительная функция, заданная на единичной сфере, удовлетворяющая интегральному условию (1). Существует ли замкнутая выпуклая поверхность, которая в точке с нормалью n (для каждого n) имела бы гауссову кривизну $K(n)$? Минковский доказал, что такая поверхность действительно существует, не доказав, однако, что поверхность будет регулярной даже, если $K(n)$ — аналитическая функция (Минковский употребляет гауссову кривизну в смысле предела отношения площади сферического изображения поверхности к площади области на поверхности. Такое определение гауссовой кривизны не предполагает регулярности поверхности). Этот пробел в решении Минковского также был устранен Г. Леви, который доказал аналитичность поверхности в предположении аналитичности и положительности функции $K(n)$.

Автор дает решение проблемы Минковского для случая регулярной функции $K(n)$. Если $K(n)$ дважды дифференцируема, то соответствующая выпуклая поверхность трижды дифференцируема. Решение проводится в том же плане, как и решение проблемы Вейля, с расчленением на три предложения, аналогичных а), б), в). *А. В. Погорелов*

См. также: 2055, 2093, 2094, 2206.

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

2385. Решение при помощи блоков задачи Дирихле для разностного аналога уравнения Лапласа. Солцер (An abridged block method for the solution of the Dirichlet problem for the Laplace difference equation. Saltzer Charles), J. Math. and Phys., 1953, **32**, № 1, 63—67 (англ.)

Рассматривается область специального вида, именно область, состоящая из суммы двух прямоугольников L и R. При этом R находится в первой четверти XOY и его две стороны совпадают с осями координат; L находится во второй и третьей четвертях и его одна сторона совпадает с осью OY и, следовательно, содержит общую часть с соответствующей стороной прямоугольника R. Кроме того, предполагается, что стороны прямоугольников R и L, параллельные оси OX, не являются продолжением одна другой. Указанная область покрывается сеткой $N(ph, qh)$ $(p, q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ с шагом h (при этом предполагается, что все стороны обоих прямоугольников R и L проходят через узлы), для которой решается разностный аналог задачи Дирихле. Обозначения: $A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ — n внутренних узлов из N, принадлежащих одновременно и R и L (их координаты $(0, h)$, $(0, 2h)$, $\ldots$, $(0, nh)$); $B=(b_1, b_2, \ldots, b_r)$ — r граничных узлов N, принадлежащих L, но не принадлежащих R; $C=(c_1, c_2, \ldots, c_s)$ — s граничных узлов N, принадлежащих R, но не принадлежащих L, так что граничные узлы N составляют $B+C$; $U(ph, qh)$ — функция, определенная на N, гармоническая (в разностном смысле) на N и удовлетворяющая условиям: $U|_B = V_k$ $(k=1, \ldots, r)$; $U|_C = W_k$ $(k=1, \ldots, s)$; $U|_A = U_k$ $(k=1, \ldots, n)$.

Выражаем в каждом из «прямоугольников» LN и RN функцию U через ее значения на границе — $A+B$ и $A+C$ соответственно — посредством формул

$$U(-ph, qh) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{pqk} U_k + \sum_{k=1}^{r} \sigma_{pqk+n} V_k, \qquad (1)$$

$$U(ph, qh) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{pqk} U_k + \sum_{k=1}^{s} \mu_{pqk+n} W_k \qquad (2)$$

соответственно, где σ_{pqk} и μ_{pqk} — коэффициенты, не зависящие от U_k, V_k и W_k; в частности

$$U(-h, qh) = \sum_{k=1}^{n} \sigma_{1qk} U_k + \eta_q$$

и

$$U(h, qh) = \sum_{k=1}^{n} \mu_{1qk} U_k + \zeta_q,$$

где $\eta_q = \sum_{k=1}^{r} \sigma_{1qk} + n V_k$, $\zeta_q = \sum_{k=1}^{s} \mu_{1qk} + n W_k$ — известные величины. Замечая, что U должна быть гармонической (в разностном смысле) на A, приходим к системе линейных уравнений

$$4U_q = U_{q+1} + U_{q-1} + \sum_{k=1}^{n} (\mu_{1qk} + \sigma_{1qk}) U_k + (\zeta_q + \eta_q)$$
$$(q = 2, 3, \ldots, n-1).$$

Прибавляя еще два уравнения для $q = 1$ и $q = n$, получаем систему n линейных уравнений для n неизвестных U_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, откуда, в свою очередь, по формулам (1) и (2), дающим явное решение разностного аналога задачи Дирихле для прямоугольника, можно вычислить значения U в любом узле N.

Указанный процесс может быть применен к областям, состоящим из конечного числа примыкающих или налегающих друг на друга прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, а также к областям размерности выше второй.

Преимущество рассматриваемого автором метода заключается в значительно меньшем, по сравнению с обычным методом, числе уравнений. В случае, если полученная система уравнений не может быть решена непосредственно (из-за большого числа уравнений), ее удобно решать методами итераций или релаксации; при этом сходимость имеет место.

В. К. Саульев

2386. Сходимость итерационных методов. Кикута (Convergence of iterative methods. Kikuta Takashi), Progr. Theoret. Phys., 1953, **10**, № 6, 653—672 (англ.)

Рассматриваются итерационные методы решения обычного в квантовой механике уравнения

$$(\hat{H}_0 - E)\psi = \lambda H_1 \psi, \qquad (1)$$

где H_0 и $\hat{H}_1$ — самосопряженные операторы, λ—константа связи, E — энергия. В (1) искомой величиной может быть λ (например, проблема дейтрона) или E. В обоих случаях можно написать (1) в виде

$$\hat{A}\psi = \lambda \hat{B}\psi \qquad (2)$$

с искомым собственным значением λ.

Для итерационного метода

$$\psi_{n+1} = A^{-1} B \psi_n,$$

$$\lambda_n = (\psi_n, \hat{A}\psi_n) / (\psi_n, B\psi_n)$$

сходимость определяется условием $\mu > 1$, $\mu = |\lambda^{(i)}|_{\min} / |\lambda^{(0)}| \leqslant \| \Delta\psi_n \| / \| \Delta\psi_{n+1} \|$, где $\lambda^{(0)}$—искомое собственное значение, $|\lambda^{(i)}|_{\min}$ — минимальное значение всех $|\lambda^{(i)}|$, кроме $|\lambda^{(0)}|$, $\Delta\psi_n = \psi_n - \psi^{(0)}$, $\| \psi \| = \sqrt{(\psi, B\psi)}$. Сходимость тем лучше, чем больше «коэффициент сходимости» μ. Если ищется энергия, то в силу $|E|_{\min} = 0$ метод расходится. Если $\hat{H}_1$ положительно определен и ищется λ, то для основного связанного состояния метод сходится, для других связанных состояний расходится, тогда как в проблемах рассеяния существует определенная область сходимости, зависящая от энергии.

Для случая, если в (2) E и λ известны и ищется ψ (например, фаза рассеяния), рассмотрена сходимость метода Швингера

$$\psi_{n+1} = \hat{A}_n^{-1} \hat{B} \psi_n,$$

где $\hat{A}_n^{-1}\hat{B}$ отличается от $\hat{A}^{-1}\hat{B}$ введением приближенного значения фазы, полученного при помощи ψ_n, и метода Борна

$$\psi_{n+1} = \lambda \hat{A}^{-1} \hat{B} \psi_n = f + \lambda \hat{G} \psi_n,$$

где f есть решение для $\lambda = 0$. Показано, что метод Швингера имеет бо́льшую область сходимости, чем метод Борна, особенно в области малых энергий, тогда как в области больших энергий метод Борна предпочтительнее вследствие простоты. Для метода Борна дано выражение коэффициента сходимости в виде $\mu_B = |\nu^{(i)}|_{\min} / |\lambda| \leqslant \| \Delta\psi_n \| / \| \Delta\psi_{n+1} \|$, где $1/\nu^{(i)}$ — собственные значения оператора $\hat{G}$.

В качестве более эффективного метода предлагается такой:

$$\psi_{n+1} = (\hat{1} - \lambda_n \hat{B})^{-1} \hat{B} \psi_n,$$

$$\lambda_n = (\psi_n, \hat{A}\psi_n) / (\psi_n, \hat{B}\psi_n).$$

Коэффициент сходимости имеет вид: $\mu = |\lambda^{(i)} - \lambda_n| / |\lambda^{(0)} - \lambda_n|$, $i \neq 0$, что приводится к виду: $\mu = \{1 + O(\Delta\psi_n)^2\}^{-1} \| \Delta\psi_n \|^2$.

Этод метод имеет очень хорошую сходимость; кроме того, он может быть применен к вариационному методу в виде

$$\delta(\psi, (A - \lambda_0 B)\psi - 2\hat{B}\psi_0) = 0,$$

$$\lambda_0 = (\psi_0, \hat{A}\psi_0) / (\psi_0, \hat{B}\psi_0),$$

чем исключается необходимость решать громоздкое вековое уравнение для определения λ. *П. Г. Кард*

2387. Приложение приближенного интегрирования произведения к численному решению интегральных уравнений. Янг (The application of approximate product-integration to the numerical solution of integral equations. Young Andrew), Proc. Roy. Soc., 1954, **A224**, № 1159, 561—573 (англ.)

Предлагаемый способ решения основан на применении к приближенному вычислению интеграла квадратурных формул интерполяционного типа с весовой функцией

Рассматривается уравнение

$$f(x) + g(x) = \int_a^b k(x, y) f(y)\, dy \qquad (1)$$

(g, k — заданные и f — искомая функция).

В квадратурной формуле

$$\int_a^b f(x) \varphi(x)\, dx \approx \sum_{r=1}^{n} \alpha_r f(x_r) \qquad (2)$$

узлы x_k считаются заданными, а весовая функция φ — любой (разрывной или с другими особенностями, лишь бы была обеспечена сходимость всех интегралов, участвующих в вычислениях). Коэффициенты α_k выбираются так, чтобы квадратурная формула давала точный результат для всевозможных многочленов степени $< n-1$.

При применении квадратуры (2) к интегралу, входящему в уравнение (1), за весовую функцию принимают ядро $k(x, y)$. Так как оно зависит от x, для каждого x_j нужно вычислять свой столбец квадратурных коэффициентов α_{ij}. После этого полученная алгебраическая задача решается обычными методами.

Тот же метод решения применим к уравнению типа Вольтерра $f(x) + g(x) = \int_a^x k(x, y) f(y)\, dy$, так как оно сразу же приводится к виду (1), если считать, что $k(x, y) = 0$ при $y > x$. *В. И. Крылов*

2388. К решению некоторых функциональных уравнений. Хейнхольд (Zur Lösung gewisser Funktionalgleichungen. Heinhold J.), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 414—422 (нем.)

Рассматриваются функциональные уравнения

$$fhfh\cdots hf = ghgh\cdots hg$$

(f входит n раз, g — m раз). В предположении, что заданные функции $g(x)$ и $h(x)$ строго растут в $(-\infty, \infty)$ и $g(x) > h^{-1}(x)$ (h^{-1} — обратная для h), дается эффективный графический метод приближенного разыскания $f(x)$. Доказывается, что этим методом могут быть получены все непрерывные растущие решения $f(x)$. Аналогичным образом, в предположении, что $f(x)$ и $g(x)$ заданы, строго растут и $g(x) > f(x)$, дается метод приближенного разыскания $h(x)$.

Предлагаемые автором методы являются обобщениями метода, приведенного в книге Л. Коллатца «Численные методы решения дифференциальных уравнений» (Изд-во иностр. лит-ры, М., 1953, 412—413) для уравнения $ff = g$. *М. К. Гавурин*

2389. Приближенный метод для линейных неравенств. Моцкин, Шёнберг (The relaxation method for linear inequalities. Motzkin T. S., Schoenberg I. J.), Canad. J. Math., 1954, 6, № 3, 393—404 (англ.)

Изучается некоторый итерационный процесс для нахождения одного из решений совместной системы линейных неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (1)$$

где a_{ij} и b_i — произвольные вещественные числа.

Если H_i — полупространство евклидова пространства R^n, определяемое i-м неравенством этой системы, то множество ее решений изображается пересечением

$$A = \bigcap_{i=1}^{m} H_i$$

(назовем его многогранником системы (1)). Так как система (1) предполагается совместной, то это пересечение не пусто.

Возьмем какую-нибудь точку p пространства R^n. Если $p \in A$, то координаты точки p удовлетворяют системе (1) и потому в этом случае вопрос о нахождении какого-нибудь решения системы (1) исчерпан. Если $p \notin A$, то среди полупространств H_i выбираются такие, от которых точка p наиболее удалена, и одно из них, например H_j, фиксируется. Пусть далее q — проекция точки p на полупространство H_j. Определяем для некоторого фиксированного λ, $0 < \lambda \leqslant 2$, точку $p_1 = p + \lambda(q - p) = F_\lambda(p)$. Если $p_1 \in A$, то процесс останавливается; если же $p_1 \notin A$, то берем точку $p_2 = F_\lambda(p_1)$ и т. д. В результате такого процесса получается последовательность точек

$$p = p_0, p_1, \ldots, p_\nu, \ldots, \qquad (2)$$

лежащих вне A.

Устанавливаются следующие свойства последовательности (2):

Теорема 1. Пусть размерность r многогранника A системы (1) совпадается с n. Если $0 < \lambda < 2$, то последовательность (2) либо оканчивается через конечное число шагов (и тогда для ее последней точки p_N $F_\lambda(p_N) \in A$), либо сходится к некоторой точке границы многогранника A. Если $\lambda = 2$, то последовательность (2) всегда оканчивается через конечное число шагов.

Теорема 2. Пусть $r < n$ и L_r — минимальное линейное подпространство из R^n, содержащее A (A не пусто). Если $0 < \lambda < 2$, то последовательность (2) либо оканчивается через конечное число шагов, либо сходится к некоторой точке из A. Если $\lambda = 2$, то последовательность (2) либо оканчивается через конечное число шагов, либо существует такое число ν_0, что все точки p_ν с $\nu \geqslant \nu_0$ будут лежать на некоторой сферической поверхности S_{n-r-1} с осью L_r.

Здесь через S_{n-r-1} обозначено геометрическое место точек x, удовлетворяющих уравнению $|x-a| = |p-a|$, где p — какая-нибудь фиксированная точка пространства R^n, не лежащая в L_r, и a — произвольная точка из L_r.

Последовательность (2) строится и изучается лишь в предположении, что система (1) совместна. Так как в случае несовместной системы (1) свойства последовательности (2) неизвестны, то применение рассматриваемого метода к системе (1) имеет смысл лишь после того, как установлена уже ее совместность.

В последнем разделе рассматриваемый метод распространяется при $\lambda = 2$ на случай бесконечной системы (1), обладающей ограниченным множеством решений. *С. Н. Черников*

2390. Приближенный метод для линейных неравенств. Агмон (The relaxation method for linear inequalities. Agmon Shmuel), Canad. J. Math., 1954, 6, № 3, 382—392 (англ.)

Работа посвящена итерационному методу нахождения одного из решений совместной системы линейных неравенств

$$l_i(x) \equiv \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + b_i \geqslant 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m), \qquad (1)$$

где a_{ij} и b_j — произвольные вещественные числа. Этот метод, называемый методом ортогональных проекций, состоит в следующем. Пусть $x^{(0)}$ — произвольная точка евклидова пространства R^n; $x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)}$, если $x^{(\nu)}$ — решение системы (1); если $x^{(\nu)}$ не является решением системы (1), то $x^{(\nu+1)}$ — ортогональная проекция точки $x^{(\nu)}$ на наиболее удаленную от нее плоскость $l_{i_0}(x) = 0$ из числа тех плоскостей $l_i(x) = 0$, для которых $l_i(x^{(\nu)}) < 0$ (если таких плоскостей несколько, то выбираем какую-нибудь одну из них):

$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} + t a_{i_0}, \qquad (2)$$

где $a_{i_0} = (a_{i_0 1}, \ldots, a_{i_0 n})$ и $t = -l_{i_0}(x^{(\nu)}) / |a_{i_0}|^2$.

В реферируемой работе доказано, что если система (1) совместна, то последовательность $\{x^{(\nu)}\}$ сходится к некоторому решению x системы (1), причем

$$|x^{(\nu)} - x| \leqslant 2R\theta^{(\nu)}, \qquad (3)$$

где R — расстояние от точки $x^{(0)}$ до ближайшего решения системы (1) и θ — число, удовлетворяющее условию $0 < \theta < 1$ и определяемое только матрицей (a_{ij}). Это предложение и является по существу основным результатом работы.

Рассматриваемый метод проекций совпадает с частным случаем ($\lambda = 1$) итерационного метода, изложенного в работе Моцкина и Шёнберга (см. реф. 2389).

Оценка (3) быстроты сходимости последовательности $\{x^{(\nu)}\}$, установленная в реферируемой работе, практически мало эффективна, так как зависимость числа θ от элементов матрицы (a_{ij}) является весьма сложной; указанная же в реферируемой работе оценка сверху числа θ требует такого количества вычислений, что пользоваться ей на практике вряд ли целесообразно. *С. Н. Черников*

2391. О проблеме существования в линейном планировании. Джэксон (On the existence problem of linear programming. Jackson James R.), Pacif. J. Math., 1954, 4, № 1, 29—36 (англ.)

Пусть Γ — вектор или матрица. Тогда под неравенствами: а) $\Gamma = 0$, б) $\Gamma \geqq 0$, в) $\Gamma > 0$, г) $\Gamma \geqq 0$ подразумевается, что а) каждая компонента Γ равна нулю, б) каждая компонента Γ неотрицательна, в) каждая компонента Γ неотрицательна и имеется хотя бы одна положительная, г) каждая компонента Γ положительна.

Рассматривается следующая проблема существования в теории линейного планирования (см. реф. 2409К): существует ли для данных матрицы A и вектора b вектор $x \geqq 0$ такой, что $Ax = b$? Другими словами, является ли множество $\{A; b\} = \{x \mid Ax = b; x \geqq 0\}$ непустым?

Доказывается теорема:

1. Следующие гипотезы эквивалентны: 1) существует вектор w такой, что $A'w > 0$; 2) не существует $x \geqslant 0$ такого, что $Ax = 0$; 3) для любого b множество $\{A; b\}$ ограничено; 4) для любого b такого, что $\{A; b\}$ непусто, и для любого c минимум (cx) по множеству $\{A; b\}$ достигается в $\{A; b\}$.

Затем устанавливается ряд необходимых и достаточных признаков непустоты множества $\{A; b\}$ в терминах теории игр. Пусть $A_{k_1}, \ldots, A_{k_m}$ — максимальная линейно-независимая подсистема столбцов матрицы A. Тогда для любого столбца A_j матрицы A $A_j = \sum_{i=1}^{m} D_{ij} A_{k_i}$ и, если уравнение $Ax = b$ имеет решение, $b = \sum_{i=1}^{m} e_i A_{ki}$.

Тогда, если сформировать матрицу H с компонентами $H_{ij} = D_{ij} - e_i$, то $\sum_{i=1}^{m} H_{ij} = 0$ $(j = 1, \ldots, m)$ и эту матрицу можно рассматривать как матрицу парной игры с нулевой суммой, где H_{ij} означает проигрыш 2-го игрока 1-му, если 1-й игрок выбирает строку i, а 2-й — столбец j.

Доказываются следующие теоремы:

2. Если столбцы матрицы A и вектор b лежат в одной гиперплоскости, не проходящей через начало координат, то $\{A; b\}$ непусто тогда и только тогда, когда стоимость игры с матрицей H для 1-го игрока равна нулю; в этом случае $\{A; b\}$ есть множество оптимальных стратегий для 2-го игрока.

3. Если существует вектор w такой, что $A'w > 0$ и $(bw) > 0$, то $\{A; b\}$ непусто тогда и только тогда, когда стоимость игры с матрицей H равна нулю.

4. При условии теоремы 3 $\{A; b\}$ непусто тогда и только тогда, когда выполняется любое из двух эквивалентных условий: а) не существует $w \geqq 0$ такого, что $H'w > 0$; б) матрица H не удовлетворяет гипотезе 1. *А. П. Ершов*

2392. Приближенное интегрирование произведения. Янг (Approximate product-integration. Young Andrew), Proc. Roy. Soc., 1954, A224, № 1159, 552—561 (англ.)

На отрезке $[a,b]$ дана функция $\varphi(x)$ и последовательность линейно независимых функций $F_i(x)$ $(i = 0,1, \ldots)$. Абсциссы x_r $(r = 1,2,\ldots,n)$ квадратурной формулы $\int_a^b f\varphi dx \sim \sum_{r=1}^{n} \alpha_r f_r$ считаются заданными, коэффициенты же α_r выбираются так, чтобы формула давала точный результат для первых n функций F_i. α_r предлагается находить, как это и делалось раньше в вычислительной практике, из системы уравнений

$$\sum_{r=1}^{n} \alpha_r F_i(x_r) = \int_a^b F_i \varphi dx \quad (i = 0,1,\ldots,n-1).$$

Матрица системы $F = \| F_i(x_r) \|$, как и обратная ей F^{-1}, не зависит от «весовой функции» φ и может быть вычислена один раз (для любых φ).

В статье за $F_i(x)$ принимаются либо $(x - x_1)^i$, либо $(x - \eta)^i$ $(\eta = (x_1 + x_n)/2)$. Отрезок интегрирования $[a,b]$ делится на n одинаковых частей. Абсциссы выбираются либо на концах частичных отрезков, либо на их серединах. Для $n = 2,3,\ldots,7$ в обоих случаях вычислены обратные матрицы F^{-1}.

Остаток квадратуры предлагается находить путем разложения f по стройке Тейлора с дополнительным членом в форме Лагранжа. Приведены таблицы вспомогательных коэффициентов для приближенного вычисления остатка.

В добавлении к статье проф. Эйткин делает замечание о способе вычисления F^{-1} на счетных машинах. *В. И. Крылов*

2393. Численная квадратура некоторых несобственных интегралов. Сербин (Numerical quadrature of some improper integrals. Serbin H.), Quart. Appl. Math., 1954, **12**, № 2, 188—194 (англ.)

Несобственный интеграл $T[f(\theta)] = (2\pi)^{-1} \times \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\theta - \varphi) f(\varphi)\, d\varphi$ понимается в смысле главного значения. Его приближенное вычисление основано на следующих соображениях. Пусть $u(r,\theta)$ есть функция, гармоническая в круге единичного радиуса, совпадающая с $f(\theta)$ на окружности. Рассмотрим сопряженную гармоническую функцию $v(r,\theta)$, обращающуюся в нуль в центре круга. Значения, которые она принимает на окружности, равны $T[f(\theta)]$. Возьмем значения f в $2N$ равноотстоящих точках $\varphi_r = r\pi/N$ $(r = 0, \pm 1, \ldots, \pm(N-1), N)$. По ним обычным путем приближенно найдем несколько первых коэффициентов Фурье для f и построим следующее приближенное представление: $u(r,\theta) \approx \sum_0^N a_n \times r^n \cos n\theta + \sum_1^{N-1} b_n r^n \sin n\theta$. Для $v(r,\theta)$ отсюда найдем $v(r,\theta) = -\sum_1^{N-1} b_n r^n \cos n\theta + \sum_0^N a_n r^n \sin n\theta$. Если положить здесь $r = 1$ и заменить a_n и b_n их приближенными выражениями в форме сумм, то и получится правило для приближенного вычисления $T[f(\theta)]$, предложенное в статье.

Даются приложения полученного правила к вычислению трех следующих несобственных интегралов:

$$(2\pi)^{-1} \int_{-1}^{1} (x-y)^{-1} \gamma(y)\, dy,$$

$$(2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{ctg} \frac{1}{2}(\theta - \varphi) f'(\theta)\, d\theta, \quad \pi^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} (x-y)^{-1} f(y)\, dy.$$

В. И. Крылов

2394. Оценка показательного интеграла для больших комплексных аргументов. Тодд (Evaluation of the exponential integral for large complex arguments. Todd John), J. Res. Nat. Bur. Standards, 1954, **52**, № 6, 313—317 (англ.)

Рассматриваются два метода вычисления показательного интеграла

$$E_1(z) = \int_z^{\infty} \frac{e^{-u}}{u}\, du, \quad z = x + iy,$$

для больших значений комплексного аргумента. Доказывается, что применение квадратурной формулы Лагерра дает более точные результаты, чем применение асимптотических рядов. Даны три примера, иллюстрирующие применение квадратурной формулы Лагерра. *К. Е. Чернин*

2395. Вычисление обычных эллиптических интегралов и эллиптических функций. Казнав (Calcul des intégrales et des fonctions elliptiques usuelles. Cazenave René), Ann. télécommuns, 1954, **9**, № 5, 141—155 (франц.)

Рассматривается вопрос о вычислении полных эллиптических интегралов Лежандра и эллиптических функций Якоби.

Сначала указываются методы интерполирования соответствующих таблиц, а затем приводятся методы непосредственного вычисления значений интегралов и функций. Для различных областей изменения параметра (k) приводятся простейшие формулы. Указана связь между полными эллиптическими интегралами и функциями Лежандра и Бесселя.

Библиография, 17 названий. *К. Е. Чернин*

2396. Вычисление модифицированных интегралов взаимодействия с одним центром. Арато, Фрёйд (Módosított egycentrumú kölcsönhatási integrálok számítása. Arató Mátyás, Freud Géza), Magyar tud. akad. alkalm. mat. intéz. közl., 1952, **1**, 369—375 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (венг.; резюме русс., франц.)

Авторы дают метод вычисления интегралов типа

$$I_{m,n}(r_0) = \int\int \frac{r_1^m r_2^n}{r_{12} + r_0} e^{-(r_1 + r_2)}\, d\tau_1 d\tau_2$$

и вычисляют их при $m,n = 0,1,2,3$.

Из резюме авторов

2397. Добавление к формуле Симпсона для приближенных квадратур. Голомб (Contribution à la formule simpsonienne de quadrature approchée. Gołąb S.), Ann. polon. math., 1954, **1**, № 1, 166—175 (франц.)

Погрешность формулы Симпсона

$$\int_a^{a+h} f(x)\, dx - h\left\{\frac{1}{6} f(a) + \frac{2}{3} f\left(a + \frac{1}{2}h\right) + \frac{1}{6} f(a+h)\right\}$$

при малом h будет малой величиной, вообще говоря, пятого порядка малости сравнительно с h. Рассматривается частный класс функций f, имеющих вблизи точки a разложение вида

$$f(a+h) = f(a) + a_p h^p + a_q h^q + a_r h^r + a_s h^s + o(h^s),$$

где $a_p a_q a_r a_s \neq 0$, $1 \leqslant p < q < r < s$, и для него ставится задача о построении измененной формулы Симпсона $\int_a^{a+h} f(x)\, dx \sim h\left\{\lambda_0 f(a) + \lambda_1 f\left(a + \frac{1}{2}h\right) + \lambda_2 f(a+h)\right\}$, причем коэффициенты λ_i выбираются так, чтобы остаток имел возможно высокий порядок малости относительно h. Доказана теорема: Наивысший порядок малости достигается в том случае, когда

$$\lambda_1 = \frac{(q-p)\, 2^q}{(p+1)(q+1)[2^{q-p} - 1]},$$

$$\lambda_2 = \frac{(p+1)\, 2^q - (q+1)\, 2^p}{(p+1)(q+1)[2^q - 2^p]}, \qquad \lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

При $p = 1$, $q = 2$, $r = 3$ остаток имеет порядок малости $s+1$, во всех остальных случаях его порядок равен $r+1$. Симпсоновы коэффициенты $\lambda_0 = \lambda_2 = 1/6$, $\lambda_1 = 2/3$ получаются лишь в трех случаях: $(p=1, q=2)$, $(p=1, q=3)$, $(p=2, q=3)$. Значения λ_1 и λ_2, приведенные в статье, содержат ошибки.

В. И. Крылов

2398. Добавление к теории формулы Симпсона для приближенных квадратур. Голомб,

Олех (Contribution à la théorie de la formule simpsonienne des quadratures approchées. Gołąb S., Olech C.), Ann. polon. math., 1954, **1**, № 1, 176—183 (франц.)

Работа тесно примыкает к статье Голомба (см. реф. 2397). Рассматривается остаток $R(h)$ следующей измененной формулы Симпсона:

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx \approx h\,[\lambda_0 f(a) + \lambda_1 f(a+\theta h) + \lambda_2 f(a+h)],$$

$$0 < \theta < 1.$$

Для функций вида $f(a+h) = f(a) + a_p h^p + a_q h^q + a_r h^r + a_s h^s + o(h^s)$, где $a_p a_q a_r a_s \neq 0$, $1 \leqslant p < q < r < s$, выбирают λ_0, λ_1, λ_2, θ так, чтобы остаток $R(h)$ имел возможно высокий порядок малости относительно h. Если θ есть любое заданное число из интервала $(0,1)$, $R(h)$ достигает наивысшего порядка малости для $\lambda_1 = (q-p)\,W^{-1}$, $\lambda_2 = [(p+1)\,\theta^p - (q+1)\theta^q]W^{-1}$ и $\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, где $W = (p+1)\,(q+1)(\theta^p - \theta^q)$. Дальнейшее увеличение малости $R(h)$ возможно только за счет выбора θ, причем θ должно быть найдено из некоторого алгебраического уравнения. Доказывается, что это уравнение имеет единственный корень между 0 и 1. В этом случае $R(h)$ имеет порядок малости, равный $s+1$. *В. И. Крылов*

2399. Об одной формуле механической квадратуры. Карапиколов Х., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 2, 157—161

Доказывается существование квадратурной формулы вида

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = A_0 f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} [A_k f(x_0 - kd) + B_k f(x_0 + kd)], \qquad (1)$$

где A_k, B_k, x_0 и d $(0 < d < 1/n)$ выбраны так, что (1) обращается в тождество, когда $f(x)$ — любой многочлен степени не выше $2n+2$.

В случае $x_0 = 0$ задача сводится к решению уравнения

$$\int_0^{1/d} x^2 (x^2 - 1^2)(x^2 - 2^2)\ldots(x^2 - n^2)\,dx = 0$$

с неизвестным d, которое автором подробно исследуется; в частности доказывается, что оно имеет решение в интервале $(0, 1/n)$. *А. Х. Турецкий*

2400. Вычисление многомерных интегралов. Мизес (Numerische Berechnung mehrdimensionaler Integrale. Mises Richard von), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 6, 201—210 (нем.; резюме англ., франц., русс.)

Пространство имеет любое число k измерений. Область G — ограниченная и звездная относительно некоторой точки O. Начало полярной системы координат помещено в точку O. Пусть $P_1, P_2, \ldots, P_n$ — любые точки, лежащие внутри или на границе G. Рассматривается следующая формула для приближенного вычисления интеграла:

$$\int_G f\,dV \sim \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f_\nu, \quad f_\nu = f(P_\nu). \qquad (1)$$

Главной задачей автора является нахождение погрешности такой формулы. Обозначим через R радиус переменной точки границы области, dS — элемент телесного угла, $f^{(\mu)}$ — радиальную производную порядка μ от функции f, $f_\nu^{(\mu)}$ — ее значение в точке P_ν.

Если формула (1) верна для всевозможных многочленов от $x_1, x_2, \ldots, x_k$ степени $\leqslant m-1$ и функция f m-кратно непрерывно дифференцируема, то при всяких $\mu = 1, 2, \ldots, m$ имеет место равенство

$$D = \int_G f\,dV - \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu f_\nu = \int \left[\int_0^R M_\mu(r) f^{(\mu)} dr\right] dS - \sum_{\nu=1}^{n} A_\nu \int_0^{r_\nu} N_\mu(r, r_\nu) \cdot f_\nu^{(\mu)}(r)\,dr,$$

где r — радиус переменной точки области, r_ν — радиус точки P_ν,

$$M_\mu(r) = \int_r^R M_{\mu-1}(\rho)\,d\rho, \quad M_1(r) = (R^k - r^k)/k,$$

$$N_\mu(r, r_\nu) = \int_r^{r_\nu} N_{\mu-1}(\rho, r_\nu)\,d\rho, \quad N_1(r, r_\nu) = 1.$$

Даны также применения явного представления погрешности D к оценке этой погрешности как в общем случае, так и для некоторых конкретных случаев. *В. И. Крылов*

2401. О мультигармоническом анализе. Кобаяси (重調和解析法について. 小林禎作, On the multi-harmonic analysis. Kobayashi T.), 氣象集誌 (Кисё сюси — J. Meteorol. Soc. Japan), 1954, **31**, № 11—12, 16—35 (япон.; резюме англ.)

Автор предлагает пользоваться для упрощения расчетов при гармоническом анализе со значительным числом ординат следующим «мультигармоническим» методом анализа. Пусть имеются mn ординат $y_0, y_1, y_2, \ldots, y_{mn-1}$, где m — число четное, m и n — взаимно простые числа. Из этой последовательности составляют таблицу, содержащую m столбцов и n строк:

y_0	y_n	$y_{2n} \cdots y_{(m-1)n}$
y_m	y_{n+m}	$y_{2n+m} \cdots y_{(m-1)n+m}$
y_{2m}	y_{n+2m}	$y_{2n+2m} \cdots y_{(m-1)n+2m}$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$y_{(n-1)m}$	$y_{n+(n-1)m}$	$\cdots y_{(m-1)n+(n-1)m}$

После этого определяют коэффициенты Фурье для каждой строки в отдельности. Так как в j-ом ряду находятся m чисел, то получим, помимо постоянного коэффициента α_{j0}, $m/2$ косинусных коэффициентов α_{j1}, α_{j2}, ... и $(m/2)-1$ синусных коэффициентов $\beta_{j1}, \beta_{j2}, \ldots, \beta_{j(m/2-1)}$.

Коэффициенты Фурье k-го порядка тогда будут иметь значения:

$$P_k = \frac{2}{mn}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{jk}\cos jk\frac{2\pi}{n} - \sum_{j=0}^{n-1}\beta_{jk}\sin jk\frac{2\pi}{n}\right\},$$

$$Q_k = \frac{2}{mn}\left\{\sum_{j=0}^{n-1}\beta_{jk}\cos jk\frac{2\pi}{n} + \sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{jk}\sin jk\frac{2\pi}{n}\right\},$$

$$k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \frac{mn}{2}.$$

Вместо определения коэффициентов Фурье по этим формулам можно произвести дальнейшие упрощения. Для этого определяют для i-го столбца таблицы величин $\|\alpha_{ij}, \beta_{ij}\|$, косинусные коэффициенты A_{0i}, A_{1i}, ... и синусные коэффициенты B_{0i}, B_{1i}, ... Определив эти коэффициенты для всех столбцов, составляют из них таблицу величин $\|A_{ij}, B_{ij}\|$.

Тогда коэффициенты P_k и Q_k определяются через члены этой последней таблицы весьма простыми соотношениями. Такие соотношения составлены для случаев:

$mn = 60$; $m = 4$; $n = 15$ | $mn = 120$; $m = 8$; $n = 15$

$mn = 72$; $m = 8$; $n = 9$ | $mn = 180$; $m = 36$; $n = 5$

Во всех этих случаях m четное и n нечетное числа. Для случаев, когда m и n — оба нечетные числа, могут быть применены аналогичные схемы.

Для упрощения определений промежуточных значений коэффициентов Фурье приведены схемы группирования, аналогичные схемам Рунге — Эмде, Гровера или Тейлора. *М. Г. Серебренников*

2402. Вычисление интеграла диффракции. Хартри (The evaluation of a diffraction integral. Hartree D. R.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, № 4, 567—574 (англ.)

Рассматривается вопрос о вычислении интегралов

$$C_1 = \frac{1}{2\beta}\int_{-\beta}^{\beta}\cos(x\cos\theta - y\sin\theta)\cos\theta\,d\theta,$$

$$S_1 = \frac{1}{2\beta}\int_{-\beta}^{\beta}\sin(x\cos\theta - y\sin\theta)\cos\theta\,d\theta$$

и величины $F(x, y) = C_1\cos x + S_1\sin x$ для данного значения $\beta = 0{,}72$ и значений x, доходящих до 60, и y — до 40. Значения этих интегралов нужны при изучении явления диффракции в микроскопе.

Для малых значений x и y, как указывает автор, возможно применение квадратурной формулы Гаусса с числом ординат, доходящим до шестнадцати. С увеличением x и y применение этих формул требует разбиения интервала интегрирования $(-\beta, \beta)$ на несколько частей, что усложняет работу и не обеспечивает достаточной точности. Вычисление интегралов при больших значениях x и y производится путем численного интегрирования дифференциальных уравнений, которые выводит автор. Имеется график распределения ошибок численного интегрирования. *К. Е. Чернин*

2403. Замечания о численных значениях функции Ферми. Юаса, Лаберриг-Фролова (Remarques sur les valeurs numériques de la fonction de Fermi. Yuasa Tosiko, Laberrigue-Frolow Jeanne), J. Phys. Radium, 1953, **14**, 95—99 (франц.)

Для поля Кулона e^2Z/R функция Ферми имеет вид:

$F(Z, W) = (2p\overline{R})^{2s-2}\,2(s+1)\,e^{\pi t}\,|\Gamma(s+it)/\Gamma(2s+1)|^2$, где $\alpha = {}^1/_{137}$, $s^2 = 1 - \alpha^2Z^2$, $p^2 = W^2 - 1$, $t = \alpha ZW/p$ и $\overline{R} = \hbar/(m_0c)$.

Так как таблицы для гамма-функции в комплексной области недостаточны, физики часто пользуются приближенными выражениями. Авторы вычислили $|\Gamma(s+it)|^2$ с пятью значащими цифрами и дают графики $f(\pm Z, W)$ для $Z = 1$, 5 (5) 90 и $1{,}1 \leqslant W/(m_0c^2) \leqslant 6$. (Они также ссылаются на таблицу, которая еще не вышла, когда была напечатана статья.) Авторы сравнивают свои значения со значениями, полученными по приближенным формулам Бете и Бейчера, Нордхейма и Йоста (Bethe and Bacher, Nordheim and Yost). *A. Erdélyi*

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 2, 163.

2404. Упрощенный метод Ньютона в применении к алгебраическим и трансцендентным уравнениям. Коллац (Das vereinfachte Newtonsche Verfahren bei algebraischen und transzendenten Gleichungen. Collatz L.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 1—2, 70—71 (нем.)

Рассматривается итерация $z_{k+1} = g(z_k)$ $(k = 0, 1, \ldots)$, причем $g(z) = z + f(z)\,f_1(z)$ и функции $f(z)$ и $f_1(z)$ регулярны в некоторой области B. В предположении

$$f_1(z) \equiv -1/f'(z) \qquad (1)$$

возникает «обыкновенный» метод Ньютона нахождения корней уравнения $f(z) = 0$; в предположении

$$f_1(z) = -1/A, \qquad (2)$$

где A — константа, — «упрощенный» метод. В случае упрощенного метода облегчается оценка погрешности, так как приходится оценивать лишь первую производную функцию $f(z)$.

Предлагается приближенный способ оценки величины $|z_0 - z|$, z — корень уравнения n-й степени $f(z) = 0$, z_0 близко к z.

Проведение оценки связано с использованием схемы Горнера. Приводятся числовые примеры. *В. Л. Гончаров*

2405. Способ решения алгебраических уравнений, которым пренебрегают. Тейлор (A neglected method for resolution of polynomial equations. Taylor William C., Jr), J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 6, 459—464 (англ.)

Дано описание известного способа Д. Бернулли вычисления наибольшего (и наименьшего) по модулю корня уравнения с действительными коэффициентами $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. На примерах показано, что иногда этот способ очень быстро ведет к цели. *А. П. Доморяд*

2406. О функциональных уравнениях нескольких переменных. II. Ацел (Többváltozós függvényegyenletek. Aczél János), Magyar tud. akad. alkalm. mat. intéz. közl., 1952, **1**, 311—333

(журнал вышел из печати в 1953 г.) (венг.; резюме русс., франц.)

Рассматриваются решения следующих уравнений: $z[z(x, y), z(u, v)] = z[z(x, u), z(y, v)]$, $z[z(x, y), u] = z[x, z(y, u)]$, $z[z(x, y), u] = z(x, y+u)$ сведением к дифференциальным уравнениям. В качестве применения получаются различные формы дифференциальных уравнений, характеризующих функции, изображаемые номограммой из выравненных точек с тремя прямолинейными шкалами.

Из резюме автора

2407. К функциональному уравнению бисимметрии. Госсу (A biszimmetria függvényegyenletéhes. Hosszú Miklós), Magyar tud. akad. alkalm. mat. intéz. közl., 1952, **1**, 335—342 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (венг.; резюме русс., франц.)

Я. Ацел поставил следующий вопрос: какому функциональному уравнению отвечают функции вида $M(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$ соответственно $m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c]$. Интерес к этим типам функций основывается на том, что они представлены номограммой из выравненных точек с тремя прямолинейными шкалами. § 1 соответственно § 2 дают решение этих проблем. В § 1 доказывается, что при условиях дифференцируемости и строгой монотонности функции вида $M(x, y) = N(x, y) = H[X(x) + Y(y)]$, $m(x, y) = X^{-1}[f(x) + f(y)]$, $n(x, y) = Y^{-1}[g(x) + h(y)]$ соответствуют функциональному уравнению $M[m(x, u), n(y, v)] = N[m(x, v), n(y, u)]$ (которое можно считать обобщением бисимметрии). В § 2 доказывается, что непрерывным и строго монотонным решением функционального уравнения $M[m(x, u), m(y, v)] = N[m(x, y), m(u, v)]$ являются функции вида $M(x, y) = N(x, y) = G[ah(x) + bh(y) + c]$, $m(x, y) = g[af(x) + bf(y) + c]$, $g(t) = h^{-1}(t)$ и только эти.

Из резюме автора

2408. О возможности номографирования с точностью до малых высшего порядка. Крейнес М. А., Айзенштат Н. Д., Докл. АН СССР, 1954, **95**, № 6, 1137—1140

Рассматриваются номограммы из выравненных точек. Предполагается, что функции, задающие шкалы номограммы, достаточное число раз дифференцируемы и ответная шкала в каждой точке имеет определенную касательную. Тройка чисел (x_0, y_0, z_0) называется обыкновенной точкой номограммы, если 1) точка x_0 шкалы x, точка y_0 шкалы y и точка z_0 ответной шкалы z лежат на одной прямой, 2) никакие две из точек x_0, y_0, z_0 соответствующих шкал не совпадают, 3) разрешающая прямая не касается ответной шкалы в точке z_0.

Функция $z = N(x, y)$ называется номографируемой в окрестности точки (x_0, y_0), если существует номограмма, имеющая точку $(x_0, y_0, z_0 = N(x_0, y_0))$ своей обыкновенной точкой и определяющая в некоторой окрестности (x_0, y_0) функцию $z = N(x, y)$.

Функция $z = f(x, y)$ называется номографируемой в окрестности точки (x_0, y_0) с точностью до малых k-го порядка, если существует функция $z = N(x, y)$, номографируемая в этой окрестности и такая, что $f(x, y) - N(x, y) = O(\rho^k)$, где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}$.

Авторы показывают, что любая 6 раз дифференцируемая в некоторой точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$, у которой

$$f'_x(x_0, y_0) \neq 0, \qquad f'_y(x_0, y_0) \neq 0, \tag{1}$$

номографируется в окрестности этой точки с точностью до малых 6-го порядка.

В работе содержатся необходимые и достаточные условия локальной номографируемости достаточно гладкой функции, удовлетворяющей условию (1), с точностью до малых 7-го, 8-го и 9-го порядков.

С. В. Смирнов

2409 К. Введение в линейное планирование. Чарнс, Купер, Гендерсон (An introduction to linear programming. Charnes A., Cooper W. W., Henderson A., 74 pp., New York, John Wiley and Sons; London, Shapman and Hall, 1953, 2.50 doll.) (англ.)

Под термином «линейное планирование» (linear programming) подразумевается методика решения определенного круга экономических задач типа определения оптимального процентного состава продукта-смеси при заданных удельных ценах на компоненты и продажных ценах на продукт, определения оптимальных запасов сырья, оборудования, наиболее выгодного распределения товаров и т. п., сводящихся к задачам линейной алгебры.

Настоящая книга состоит из двух частей: 1-я часть (авторы—Купер и Гендерсон) — «Экономическое введение в линейное планирование», 2-я часть (автор—Чарнс) — «Математическая теория линейного планирования».

1-я часть написана независимо от 2-й (если принимать на веру результаты 2-й части), для своего чтения не требует никакой специальной математической подготовки и содержит описание некоторых конкретных задач линейного планирования и методики решения этих задач с указанием вычислительных схем и численных примеров.

С математической точки зрения задача линейного планирования состоит в отыскании максимума (минимума) линейного функционала

$$f = (c\lambda), \tag{1}$$

где c — заданный n-мерный вектор, а λ — переменный искомый вектор, подчиненный условиям

$$L\lambda = p_0, \qquad \lambda \geqslant 0, \tag{2}$$

где L — матрица линейного преобразования порядка $m \times n$, p_0 — m-мерный вектор; под отношениями неравенства понимается совокупное выполнение неравенств для соответствующих компонент. В формулировке задачи вместо условия (2) может быть условие $L\lambda \leqslant p_0$, $\lambda \geqslant 0$.

В восьми лекциях 2-й части излагается метод решения этой задачи, называемый методом симплексов.

Приводится ряд элементарных теорем о свойствах решения задачи (1), (2), а также следующая теорема двойственности: Пусть рассматриваются 2 задачи:

А. Минимизировать функционал $f = (cx)$, где c — данный и x — переменный n-мерные векторы, причем x подчинен условиям $Ax \geqslant b$, $x \geqslant 0$, где A — матрица порядка $m \times n$, b — m-мерный вектор.

В. Максимизировать функционал $g = (wb)$, где w — m-мерный вектор, подчиненный условиям $A'w \leqslant c$, $w \geqslant 0$.

Тогда $\min f = \max g$.

В конце 2-й части указывается на связь теории линейного планирования с теорией парных игр с нулевой суммой (zero-sum two-person games), установленную Нейманом.

Библиография, 29 названий. *А. П. Ершов*

2410 Д. О границах применимости теоремы С. А. Чаплыгина о дифференциальных неравенствах. Азбелев Н. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. станкоинструм. ин-т, М., 1954

2411 Д. Графическое решение плоской задачи теории упругости. Смирнов С. А. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

ТАБЛИЦЫ

2412. α-процентные точки неполной бета-функции. Кларк (Percentage points of the incomplete beta function. Clark Robert E.), J. Amer. Statist. Assoc., 1953, **48**, № 264, 831—843 (англ.)

Таблицы функции $p = P(N, X, \alpha)$, определенной соотношением

$$\alpha = \sum_{r=X}^{N} C_N^r p^r (1-p)^{N-r},$$

где $N = 10\,(1)50$, $X = 1\,(1)\,N$ и $\alpha = 0{,}005;\ 0{,}01;\ 0{,}025;\ 0{,}05$.

Таблицы имеют три входа: α, N и X; величины $p = P(N, X, \alpha)$ даны с четырьмя значащими цифрами, причем ошибка не превышает полутора единиц последней значащей цифры. Указан ряд возможных приложений этих таблиц. *Л. Н. Большев*

2413. Таблицы, пригодные для вычисления молекулярных интегралов. V. Исигуро, Юаса, Сакамото, Кимура (Tables useful for the calculation of the molecular integrals. V. Ishiguro Eiichi, Yuasa Sayoko, Sakamoto Michiko, Kimura Tösaku), Natural Sci. Rept Ochan. Univ., 1954, **4**, № 2, 171—191 (англ.)

Приводятся таблицы следующих функций:

$$-E_i(-\alpha) = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,dx,$$

$$E_i(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{e^{x}}{x}\,dx,$$

$$A_n(\alpha) = \int_1^{\infty} e^{-\alpha\lambda}\,\lambda^n d\lambda,$$

$$f_\tau(m,\ \alpha) = \int_1^{\infty} Q_\tau(\lambda)\, e^{-\alpha\lambda}\lambda^m\,d\lambda,$$

$$G_\tau^\nu(m;\ \alpha) = \int_{-1}^{1} e^{-\alpha\mu}\,P_\tau(\mu)\,\mu^m\,(1-\mu^2)^{\nu/2}\,d\mu,$$

где $P_\tau(\mu)$ — полиномы Лежандра, $Q_\tau(\lambda)$ — присоединенные функции Лежандра второго рода. Шаг по α в среднем 0,5—1,5.

Значения n и m в таблицах $A_n(\alpha)$ и $f_\tau(m, \alpha)$ изменяются от 0 через 1. Верхний предел самый разнообразный.

В таблицах $G_\tau^\nu(m;\alpha)$ τ, ν и m изменяются от 0 через 1. Верхний предел определяется равенством $\tau + \nu + m = 8$. Интерполирование данных таблиц весьма затруднительно.

Данные приведены с различным числом значащих цифр (от 9 до 19).

В статье допущен ряд опечаток. В формуле для $A_n(\alpha)$ у показателя e отсутствует множитель α; в формуле для $G_\tau^\nu(m;\alpha)$ вместо выражения $P_\tau^\mu(\mu)$ должно быть $P_\tau(\mu)$. В таблице значений $f_\tau(m, \alpha)$ (табл. XX) отсутствует указание, какое взято значение τ. *К. Е. Чернин*

2414. Таблицы интегралов, используемых при расчетах энергий молекул (III). Котани, Исигура, Хидзиката, Накамура, Амемия (Tables of integrals useful for the calculations of molecular energies. III. Kotani Masao, Ishiguro Eiichi, Hijikata Katsunori, Nakamura Takashi, Amemiya Ayao), J. Phys. Soc. Japan, 1953, **8**, № 4, 463—476 (англ.)

См. РЖХим, 1954, 37322.

2415. Артиллерийские таблицы логарифмов. Свирский (Artyleryjskie tabele logarytmów. Swirski W.), Przegl. artyl., 1954, **10**, № 7, 67—74, Dodatek 24 s. (польск.)

2416 К. Таблицы $\ln\Gamma(z)$ в комплексной области. Абрамов А. А., 333 стр. М., Изд-во АН СССР, 1953, 30 р. 20 к.

Шестизначные таблицы $\ln\Gamma(z)$, где $z = x + iy$, $x : 1(0{,}01)\,2$, $y : 0(0{,}01)4$, составлены в Институте точной механики и вычислительной техники АН СССР. На каждом развороте на левой странице размещены значения $\mathrm{Re}\ln\Gamma(z)$, на правой $\mathrm{Im}\ln\Gamma(z)$; приводятся вторые разности. Введение к таблицам содержит сведения о принятой при составлении таблиц методике вычислений, а также о пользовании готовыми таблицами. Для удобства интерполяции дается вспомогательная номограмма. Приводится перечень формул для вычисления значений $\ln\Gamma(z)$ вне табличной области. *С. С. Токмалаева*

2417 К. Таблицы интегрального синуса и косинуса. Под ред. В. А. Диткина, 474 стр., М., Изд-во АН СССР, 1954, 43 р. 75 к.

Книга содержит таблицы интегрального синуса и косинуса

$$\mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt; \qquad \mathrm{Ci}(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt,$$

полученные в основном субтабулированием из известных таблиц, предварительно проверенных и исправленных.

Значения функций приведены с семью знаками после запятой для $x = 0\ (0{,}0001)2$, $x = 2(0{,}001)10$, $x = 10\ (0{,}005)100$. Дана также таблица функции $\mathrm{Ci}(x) - \ln x$ для $x = 0(0{,}0001)0{,}0099$. Ошибка таб-

личных значений всех перечисленных функций не превосходит $6 \cdot 10^{-8}$.

Для удобства пользования формулой квадратичной интерполяции в приложении дана таблица значений величины $t(1-t)/2$ через 0,001, а также номограмма для определения величины $[t(1-t)/2] \times \times \Delta^2 f(x_0)$; вторые разности в таблице не приводятся. *М. К. Керимов*

2418 К. **Таблицы коэффициентов для вычисления преобразований Лапласа.** Солзер (Tables of coefficients for the numerical calculation of Laplace transforms. Salzer Herbert E., II+36 p., National Bureau of Standards Applied Mathematics Series, № 30, U. S. Government Printing Office, Washington 25, D. C., 0. 25 doll.) (англ.)

Эта брошюра связана с приближенным представлением интегралов типа

$$\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt \qquad (1)$$

в виде суммы $\sum_{i=0}^{n-1} A_i^{(n)}(p) f(i)$. Путем соответствующего выбора величин A_i формула может быть сделана точной для полиномов $f(t)$, степени не выше $n-1$; вообще же ее точность зависит от точности, с которой $f(t)$ может быть аппроксимирована таким полиномом. Таблицы предназначаются для случая, когда $f(t)$ представляется интерполяционным полиномом Лагранжа степени $n-1$ для $t = 0(1)n-1$. Приведены примеры использования таблиц и определения оценки ошибок. Сами таблицы имеют следующее строение: Раздел А. Интерполяционные коэффициенты Лагранжа $L_i^{(n)}(t)$ в виде полиномов от t для $n = 2(1)11$, $i = 0(1)n-1$. Тогда приближенно:

$$f(t) \doteqdot \sum_{i=0}^{n-1} L_i^{(n)}(t) f(i) / (n-1)!$$

Раздел В. Преобразования Лапласа интерполяционных коэффициентов. Это дает коэффициенты $B_i^{(n)}(p)$ в виде полиномов от p для тех же самых значений n и i, где $p^n B_i^{(n)}(p)(n-1)!$ определяются посредством (1), когда $f(t)$ является коэффициентом Лагранжа $L_i^{(n)}(t)/(n-1)!$. Полиномы во втором разделе могут быть получены из полиномов первого заменой t^r на $r!p^{n-r-1}$. Табл. 1 дает с 8 знаками после запятой (или 8 значащими цифрами) $A_i^{(n)}(p)$ для $n = 2(1)11$, $i = 0(1)n-1$ и для

$$p = 0{,}1(0{,}1)n-1 \quad \text{до } n = 7,$$
$$p = 0{,}2(0{,}2)n-1 \quad \text{до } n = 9,$$
$$p = 1(1)n-1 \quad \text{до } n = 11.$$

Табл. II дает с 9 значащими цифрами $n!/p^{n+1}$ для $n = 0(1)10$, $p = 0{,}1(0{,}1)10$.

К сожалению, следует заметить, что устройство этих таблиц оставляет желать много лучшего.
J. C. P. Miller

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 2, 163.

2419 К. **Таблица биномиальных коэффициентов** (Mathematical tables: Vol. 3, Table of binomial coefficients, 162 pp., Cambridge, Roy. Soc. Cambridge. U. P., 1954, 35 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1954, № 249, 9 (англ.)

2420 К. **Четырехзначные математические таблицы.** Брадис В. (Для средн. школы), 7-е издание, 64 стр., Учпедгиз, Каунас, 1954, 1 р. 15 к. (лит.)

См. также: 2055, 2221, 2234, 2306, 2330, 2337 К

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

2421. **Учет неиспользуемых состояний при синтезе релейно-контактных схем.** Рогинский В. Н., Автоматика и телемеханика, 1954, 15, № 3, 206—222

Совокупность n элементов (реле) схемы может находиться в 2^n различных состояниях, но, как правило, не все из этих состояний встречаются в процессе работы этой схемы. Состояния, встречающиеся в работе данной схемы, автор называет используемыми, а не встречающиеся — неиспользуемыми. Указывается, что к неиспользуемым состояниям нельзя относить такие состояния, которые могут появиться вследствие помех, неодновременности срабатывания реле и тому подобных причин. Конституенты единицы f_j, соответствующие неиспользуемым состояниям, обозначают цепи, которые не будут замыкаться в процессе работы схемы и поэтому равны 0. Таким образом, для любой структурной формулы F

$$F = F + \Sigma f_j, \quad F = F \Sigma \overline{f_j} = F \overline{\Sigma f_j}.$$

Конституенты, отличающиеся значением только одного элемента, называются соседними. Учет неиспользуемых состояний позволяет упрощать F подбором конституентов f_j, соседних с входящими в F. Упоминаются методы учета неиспользуемых состояний М. А. Гаврилова (Теория релейно-контактных схем, Изд-во АН СССР, 1950) и Стелера (Staebler R. E., Bell. System Techn. J., 1952, 31, № 2, 281—305). Предлагается способ подбора соседних конституентов по их номерам. Приведена таблица всех возможных состояний пяти реле, содержащая для каждого конституента номера пяти соседних конституентов. Отмечается, что при учете неиспользуемых состояний возможна многозначность решений, и предлагаются специальные обозначения для записи многозначных решений.

Рассматривается учет неиспользуемых состояний также и при синтезе многотактных схем.

Приведены примеры синтеза однотактных и многотактных схем из области телефонии. *В. И. Иванов*

2422. **Алгебраический метод анализа автономных систем двухпозиционных реле.** I. Шеста-

ков В. И., Автоматика и телемеханика, 1954, 15, № 2, 107—123

Релейной системой (или системой реле) называется всякая совокупность реле вместе с управляющими и управляемыми этими реле параметрами. Термин «релейная система» является более общим, чем термин «релейная схема», ибо содержит в себе лишь понятие о функциональной связи, но не содержит понятия о структуре цепей (способе соединения параметров и реле). В случае двухпозиционных реле работу системы можно описать булевыми уравнениями. Релейная система называется автономной, если в ней каждый управляемый параметр управляется только посредством реле, принадлежащих к этой системе, и называется неавтономной в противном случае. Система, не содержащая автономных подсистем, называется совершенно неавтономной. Исследуются процессы, возможные в автономной системе реле с одинаковыми запаздываниями τ при срабатывании и отпускании. Такая система описывается n уравнениями

$$y_k(t) = f_k(y_1(t-\tau), \ldots, y_k(t-\tau), \ldots, y_n(t-\tau))$$

или одним векторным уравнением

$$\bar{y}(t) = \bar{f}(\bar{y}(t-\tau)).$$

Всякий процесс, возможный в автономной системе, однозначно определяется ее начальным состоянием. Если $\bar{y}(t) = \text{const} = \bar{y}_{j_0}$ при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, то $\bar{y}(t) = \text{const} = \bar{y}_{j_i}$ и при $i\tau \leqslant t \leqslant (i+1)\tau$. Если $\bar{y}_{j_{i+1}} = \bar{y}_{j_i}$, то $\bar{y}_{j_i}$ называется устойчивым состоянием системы. Любой возможный процесс записывается в виде

$$\bar{y}_{j_0}, \bar{y}_{j_1}, \ldots, \bar{y}_{j_{i_0-1}}, (\bar{y}_{j_{i_0}}, \ldots, \bar{y}_{j_{i_0+m-1}}),$$

где в скобках стоит периодическая часть. Процесс называется нормальным, если $\bar{y}(\bar{0}) = \bar{0}$, и вынужденным в противном случае. Любые два процесса, возможные в автономной системе, либо не имеют ни одного общего состояния, либо сходятся к общему подпроцессу. Определение последовательности значений вектора $\bar{y}$ по заданному начальному значению $\bar{y}(0)$ и заданной функции $\bar{f}$ называется анализом автономной системы. Предлагается метод анализа автономных систем, основанный на разложении функции $\bar{f}$ на конституенты единицы. Одинаковая нумерация конституентов единицы и состояний системы, обращающих конституенты в 1, позволяет найти анализируемые процессы простым обозрением формулы разложения функции $\bar{f}$. В качестве примеров анализируется схема из книги М. А. Гаврилова (Теория релейно-контактных схем, М.—Л., 1950) и схема из статьи В. А. Розенберга (Автоматика и телемеханика, 1939, № 1, 37—48).

Примечание референта. Векторы обозначены не по стандарту. Ссылка на статью В. А. Розенберга содержит ошибочное указание «т. XIII».

Г. Н. Поваров

2423. Алгебраический метод синтеза автономных систем двухпозиционных реле. Шестаков В. И., Автоматика и телемеханика, 1954, 15, № 4, 310—324

Синтезом автономных систем двухпозиционных реле называется нахождение автономных систем по заданным процессам, которые могут совершаться в этих системах. Задача такого синтеза обратна задаче анализа автономных систем (см. реф. 2422). Для синтеза автономных систем пригодны лишь совокупности процессов, каждая пара которых либо не имеет ни одного общего состояния, либо оба процесса из этой пары сходятся к общему подпроцессу. Всего в автономной системе с n реле возможно 2^n процессов. Процессы, один из которых не является частью другого, называются существенно различными. Существенно различные процессы могут иметь общую часть. Для синтеза системы достаточно задать лишь все существенно различные процессы. Если совокупность заданных процессов содержит не все 2^n возможных состояний системы, то задача синтеза делается неоднозначной. Чтобы сделать ее определенной, надо наложить на искомую систему дополнительные требования. Например, если задан один процесс, то можно наложить требование устойчивости, требование максимальной устойчивости, или требование, чтобы система переходила из любого состояния, не входящего в заданный процесс, в состояние $\bar{0}$ и сохраняла его, если $\bar{0}$ не входит в процесс. Синтез, удовлетворяющий последнему требованию, называется нормальным. Алгоритм нормального синтеза дается формулой

$$\bar{f}(\bar{y}) = \sum_{i=0}^{N-1} \bar{y}_{j_{i+1}} p_{j_i}(\bar{y}), \qquad (1)$$

где N — число состояний в заданном процессе, а Σ — знак булевой суммы. Совокупность процессов, пригодных для синтеза, называется полной, если в ней встречаются все 2^n состояний системы. Алгоритм синтеза автономной системы по заданной полной совокупности процессов дается формулой

$$\bar{f}(\bar{y}) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=0}^{N_k-1} \bar{y}_{j_{i+1}^{(k)}} p_{j_i^{(k)}}(\bar{y}), \qquad (2)$$

где N — число процессов, N_k — число состояний в k-ом процессе. Формулу (1) можно считать частным случаем формулы (2). Формула (2) и ее различные частные случаи дают алгебраический метод синтеза автономных систем двухпозиционных реле. Если первые $i_0 + m$ состояний в заданном процессе $\bar{y}(0), \bar{y}(1), \ldots, \bar{y}(i_0-1), (\bar{y}(i_0), \ldots, \bar{y}(i_0+m-1))$ не все различны и M — максимальное число равных среди них, то вводится $N-n$ дополнительных реле и вектор $\bar{y}(i)$ заменяется вектором

$$\bar{z}(i) = [y_1(i), \ldots, y_n(i), \beta_1(i), \beta_2(i), \ldots, \beta_{N-n}(i)],$$

где N находится из неравенства $M \leqslant 2^{N-n}$ и $\beta_{N-n}(i) \ldots \beta_2(i)\,\beta_1(i)$ есть двоичное представление числа предшествующих членов последовательности, равных $\bar{y}(i)$. Приводится 5 примеров применения предложенного метода синтеза. В заключение этот метод сравнивается с методами, основанными на представлении процессов в релейных системах с помощью графиков (временных диаграмм) и с по-

мощью таблиц включений. Вывод таков, что все различные способы представления процесса работы автономной системы реле, используемые в сравниваемых методах, совершенно равносильны и отличаются друг от друга лишь различной степенью сложности и наглядности. По мнению автора, предложенный в статье алгебраический способ записи процесса является наиболее компактным, а способ, использующий временные диаграммы, — наиболее наглядным.

Примечание референта. Векторы обозначены не по стандарту. *Г. Н. Поваров*

2424. О преобразовании моноциклической последовательности в возвратную. Шестаков В. И., Докл. АН СССР, 1954, 98, № 4, 541—544

По определению последовательность n-разрядных двоичных чисел (1) содержится в последовательности N-разрядных двоичных чисел (2), где $N \geqslant n$, если двоичные цифры каждого члена последовательности (1) совпадают с соответствующими цифрами соответствующего члена последовательности (2). Переход от (1) к (2) называется расширением, или уточнением, последовательности (1), а обратный переход — сужением, или огрублением, последовательности (2). Последовательность двоичных чисел, состоящая из непериодической части длины i_0 и периодической части с периодом m, называется моноциклической. Моноциклическая последовательность (м. п.), все первые $i_0 + m$ членов которой различны, называется основной. Всякая м. п. расширяема до основной. Указан метод такого расширения. Всякая возвратная последовательность n-разрядных двоичных чисел, в которой каждый член есть однозначная функция φ от непосредственно предшествующего члена, является основной м. п. (с периодом $m \leqslant 2^n$), и обратно. Дается метод эффективного построения функции φ для любой заданной основной м. п. Метод основан на представлении м. п. в виде последовательности

$$\mathbf{y}(0), \ldots, \mathbf{y}(i), \ldots, \mathbf{y}(i_0-1)\,(\mathbf{y}(i_0), \ldots, \mathbf{y}(i_0+m-1))$$

значений переменного вектора $\mathbf{y}$ из n-мерного пространства над простым полем характеристики 2. Пусть $\mathbf{y}(i+1)=\mathbf{f}(\mathbf{y}(i))$ Тогда, $\mathbf{f}(\mathbf{y})=\sum_{i=0}^{2^n-1} \mathbf{y}(i+1) \times p_{j_i}(\mathbf{y})$, где $p_{j_i}(\mathbf{y})$ суть конституенты разложения единицы по n переменным в смысле двухэлементной булевой алгебры, соответствующие вектору $\mathbf{y}(i)$. Знак Σ можно понимать либо как знак сложения в поле характеристики 2, либо как знак булева сложения. Компоненты f_k векторной функции $\mathbf{f}$ можно рассматривать как соответствующие двоичные цифры φ_k искомой функции φ. Соединяя метод расширения м. п. до основной с методом определения φ, можно преобразовать любую м. п. (в том числе любую эмпирически полученную последовательность чисел) в возвратную последовательность описанного вида. Указывается, что изложенный метод дает возможность синтезировать автономные релейные системы (см. реф. 2422) по любым заданным последовательностям их состояний.

В заключение сообщается, что изложенный метод может быть распространен на случай $n \to \infty$. Например, этим методом можно построить примитивно рекурсивную функцию, последовательность значений которой образует натуральный ряд.

Г. Н. Поваров

2425. Применение ламп с холодным катодом в качестве элементов быстродействующих релейных схем. Шилейко А. В., Тр. Моск. энерг. ин-та, 1953, № 13, 42—52

Анализируется применимость газоразрядных ламп с холодным катодом в качестве элементов релейных схем. Отмечается, что широкое развитие автоматических и телемеханических устройств дискретного действия поставило вопрос о выборе и освоении новых релейных элементов, удовлетворяющих требованиям надежности и быстродействия. Электронная лампа как релейный элемент обладает принципиальными недостатками: 1) срок ее службы весьма ограничен; 2) для конструирования сложных автоматических схем необходимо весьма большое количество электронных ламп. Эти недостатки делают сложные автоматические системы на электронных лампах очень ненадежными и заставляют искать другого решения указанного вопроса.

Отметив, что свойственные газоразрядным лампам нестабильность характеристики зажигания и инерционность возникновения и развития разряда препятствовали использованию газоразрядных ламп с холодным катодом в качестве релейных элементов, автор кратко излагает метод стабилизации характеристик газоразрядных ламп с холодным катодом, предложенный Л. Н. Кораблевым (Докл. АН СССР, 1948, 62, № 2, 215—218) и состоящий в создании в лампе постоянного темного разряда. По мнению автора, использование этого метода почти полностью исключает опасения, связанные с малой надежностью обычных ламп с холодным катодом, и открывает широкие возможности внедрения их в различные области электронной техники.

Для доказательства применимости таких ламп в качестве элементов релейных схем автор пользуется теорией релейно-контактных схем (Гаврилов М. А., Теория релейно-контактных схем, М. — Л., Изд-во АН СССР, 1950). Согласно этой теории доказательство применимости данных устройств в качестве релейных элементов сводится к доказательству реализуемости простейших логических операций с помощью таких устройств. В статье приводятся схемы на газоразрядных диодах с холодным катодом для логического утверждения (схема «привязки» потенциала), логического сложения и логического умножения. Кроме того, приводятся схемы триггера и одновибратора (реле с задержкой) на безнакальных тиратронах МТХ-90.

Основным преимуществом схем с газоразрядными лампами является их высокая экономичность. Лампы обладают сроком службы порядка десятков тысяч часов и малыми габаритами. Свечение разряда облегчает наблюдение за работой сложных схем и отыскание повреждений в них. Разрешающая способность ламп достигает 30—50 μсек. Возможно создание многоэлектродных ламп с холодным катодом, заменяющих несколько реле или шаговый переключатель. Таковы, например, декатроны.

В заключение отмечается малая изученность этой области.

Примечание референта. Доказательство применимости газоразрядных ламп в качестве релейных элементов не полно, так как не дается схемы для операции инверсии (отрицания). *Г. Н. Поваров*

2426. Выявители совпадений двоичных импульсов. Гейтс (Coincidence detectors for binary pulses. Gates C. R.), Conven. Rec. Inst. Radio Engrs, 1953, № 8, 132—136 (англ.)

Рассматривается применение параллельных каналов для помехоустойчивой передачи двоичных импульсов при наличии гауссова шума в каналах. Каналы имеют одинаковое отношение $\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}$, но шумы в разных каналах независимы. С помощью классического критерия сравнения статистических гипотез исследуются два метода приема импульсов: 1) наличие импульса устанавливается по распределению точных значений напряжений в каналах («непрерывный прием»); 2) наличие импульса устанавливается по распределению решений о приеме импульса в отдельных каналах («дискретный прием»). Первый метод сводится к суммированию напряжений в каналах, что повышает эффективное отношение $\frac{\text{сигнал}}{\text{шум}}$ в $\sqrt{m}$ раз, где m — число каналов. Второй метод сводится к вычислению булевой функции двоичных переменных, изображающих решения о приеме импульса в отдельных каналах. Эта функция является симметрической и принимает значение 1, когда число аргументов, принимающих значение 1, больше некоторого числа $r \leqslant m$.

Практически дискретный прием производится с помощью симметрического релейно-контактного двухполюсника, реализующего указанную функцию. Дается общий метод нахождения вероятностей ложного замыкания и размыкания любых контактных двухполюсников по заданным вероятностям ложного срабатывания и несрабатывания приемных реле. При этом мостиковый двухполюсник сначала преобразуется в равносильный параллельно-последовательный двухполюсник, для чего автор рекомендует метод трансфигурации (Keister W., Ritchie A. E., Washburn W. H., The design of switching circuits, Van Nostrand Co., 1951). Параллельно-последовательный двухполюсник анализируется алгебраически. Пусть вероятность ложного срабатывания реле X_i есть α_i. Тогда в булевой функции переменных $X_1, X_2, \ldots, X_m$, изображающей двухполюсник, производятся следующие замены: $X_i + X_j$, где $i \neq j$, на $\alpha_i \alpha_j$; $X_i X_j$, где $i \neq j$, на $1 - (1 - \alpha_i)(1 - \alpha_j)$; $X_i + X_i$, $X_i X_i$ и $X_i + X_i X_j$ на α_i. Полученное выражение есть вероятность A ложного замыкания двухполюсника. Если $A = F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$, то вероятность ложного размыкания двухполюсника есть $B = 1 - F(1 - \beta_1, 1 - \beta_2, \ldots, 1 - \beta_m)$, где β_i — вероятность ложного несрабатывания реле X_i. Автор оговаривает нестрогость изложения метода. Отмечается возможность построения общей теории вероятностных релейно-контактных схем, содержащей методику синтеза и двойственного преобразования.

В заключение отмечается возможность распространения описанной методики применения параллельных каналов на случай передачи многокачественных сигналов.

В статье много опечаток. В частности, в формуле (1) напечатано $\int_{V_0}^{\infty} g(0, \sigma)\, dt$ вместо $\int_{\mu V_0}^{\infty} g(0, \sigma)\, dt$, а в формуле (28) напечатано $xx = x$ вместо $x \cdot (x^* y) = x$. *Г. Н. Поваров*

2427. Анализ релейно-контактных схем. Колпинский (Analiza układów stykowo-przekaźnikowych. Kołpiński Aleksy), Przegl. telekomun., 1953, **26**, № 12, 380—384 (польск.)

Отмечая широкое развитие массового рационализаторского движения в новых, социалистических условиях в Польше, автор указывает на значение научной теории релейно-контактных схем, созданной советскими учеными на основе математического аппарата алгебры логики, для облегчения реализации рационализаторских замыслов в телетехнике. Автор излагает основы алгебраической методики анализа и синтеза релейно-контактных схем и приводит пример синтеза узла АТС. Статья написана по материалам работ А. Н. Волоцкого (Вестн. связи (Электросвязь), 1947, № 7, 16—18) и М. А. Гаврилова (Структурный анализ и синтез релейно-контактных схем, Докторская диссертация, 1946; Электричество, 1946, № 2, 54—59).

Библиография, 6 названий.

Примечание референта. В формулах (7), (8), (21) имеются опечатки: вместо $\overline{a} + \overline{b} = \overline{ab}$, $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$, $(a' + b) \cdot (a + c) \cdot (b + c) = ab + ac = bc$ следует читать соответственно $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a \cdot b}$, $\overline{a \cdot b} = \overline{a} + \overline{b}$, $(a + b) \cdot (a + c) \cdot (b + c) = ab + ac + bc$. Название статьи несколько неточно, ибо в ней описывается не только анализ, но и синтез. *Г. Н. Поваров*

2428. О связи между понятиями многополюсной машины и алгебраической структуры. Риге (Sur les rapports entre les concepts de machine de multipole et de structure algébrique. Riguet Jacques), C. r. Acad. sci., 1953, **237**, № 6, 425—427 (франц.)

Дается краткое изложение теории машин Ашби (Ashby W. R., Design for a Brain, London, Chapmann and Hall, 1952), разработанной автором статьи. Структура машины Ашби, или А-машины (А-системы), определяется заданием 1) n множеств $E_1, \ldots, E_n$; 2) такого отношения $\Sigma \subset E \times E$ на множестве $E = E_1 \times \ldots \times E_n$, что $\Sigma\Sigma^{-1} \subset \Delta$ и $pr_2 \Sigma \subset pr_1 \Sigma$. Здесь Δ — отношение тождества, а $pr_1 \Sigma$ и $pr_2 \Sigma$ суть множество всех предыдущих и множество всех последующих членов отношения Σ. Множество E_i называется полем i-й переменной, множество E — фазовым пространством. Без ограничения общности можно считать, что $E_1 = \ldots = E_n = F$.

Теорема. Понятие структуры А-машины эквивалентно понятию алгебраической структуры (в смысле Г. Биркгофа) (Birkhoff G., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1935, **31**, 433—454), определяемой n внутренними законами $f_1, \ldots, f_n$.

Вводятся различные понятия, характеризующие А-машины. В частности, проектор Π_i определяется с помощью соотношения $\Pi_i \Sigma(x_1, \ldots, x_n) = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ (в статье вместо $\Pi_i \Sigma(x_1, \ldots, x_n)$ ошибочно напечатано $\Pi_i \Sigma f(x_1, \ldots, x_n)$. *Прим. реф.*). Переменная x_k есть параметр, если $\Pi_k \Sigma = \Pi_k$. Многополюсник определяется как А-машина, в которой параметры рассматриваются как входные переменные, а другие переменные — как выходные.

Если Σ_1 и Σ_2 определяют две А-машины, то тензорное произведение $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ также есть А-машина. В случае, когда А-машина образована схемой с электромеханическими или электронными переключателями, F есть свободная булева алгебра, порож-

денная символами, которые соответствуют независимым переключателям. Тогда решение уравнений движения А-машины сводится к исчислению булевых матриц, аналогичному исчислению двоичных отношений. *Г. Н. Поваров*

2429. Технические применения логики. Туше (Les applications techniques de la logique. Touchais Maurice), Mém. Soc. ingrs civils France, 1953, **106**, № 79, 393—426 (франц.)

Популярный доклад на совместном заседании нескольких алжирских научно-технических обществ. Дается очерк применений булевой алгебры в технике.

Сначала излагаются принципы алгебраической записи релейно-контактных схем с помощью символики математической логики и указывается на возможность электрического моделирования логических умозаключений, в частности силлогизма. Отмечается, что известный парадокс «повесить или расстрелять» можно моделировать электрическим звонком. Утверждается, что применение математической логики к релейно-контактным схемам основано на двузначном характере высказываний и схемных элементов. Упоминаются работы Монтгомери и Гаврилова.

Затем излагаются начала булевой алгебры, которую автор предлагает называть теорией альтернативы. Двоичные функции двух переменных обозначаются «наглядными знаками», построенными по следующему правилу: вершинам четырехугольника сопоставляются переменные u, v, $\bar{u}$, $\bar{v}$ и каждый конституент единицы, входящий в функцию, изображается чертой между соответствующими вершинами. Например, $u \overline{\vee} v = u + v$, $u \overline{\cdot} v = uv$, $u \overline{>} v = \bar{v}$, $u \times v = u\bar{v} + \bar{u}v$, $u :: v = 0$ и т. д. Применение наглядных знаков упрощает вывод соотношений булевой алгебры, позволяя применять булеву алгебру к самим обозначениям функций. Приводятся правила двойственного и некоторых родственных с ним преобразований. Описывается алгебраическая запись и преобразование функций с помощью операций конъюнкции, дизъюнкции и отрицания. Упоминаются и другие системы операций, порождающие все функции. Для функции трех переменных $(uf_m v)\, w + (uf_n v)\, \bar{w}$ предлагается сокращенная запись $f_m f_n \frac{uv}{w}$. Рассказывается о булевых уравнениях, в том числе о реактивных, или рефлексивных, уравнениях, ведущих к парадоксам и физически реализуемых системами с обратной связью.

Далее излагаются общие принципы применения булевой алгебры к описанию и исследованию связей в двузначных системах, в частности в электрических схемах с релейным действием. Отмечается возможность будущего применения булевой алгебры к проектированию ткацких станков-автоматов, к организации уличного движения, к организации документооборота в учреждениях. Как указывает автор, применение булевой алгебры к двузначной системе представляет практический интерес только в случае, когда эта система достаточно сложна. Упоминаются применения булевой алгебры к теории вероятностей и к вычислительной технике. Приводится пример алгебраического синтеза релейно-контактной схемы (генератора импульсов) по заданной таблице включений и затем излагается (не вполне ясно) «алгебра замков», которую автор считает новым очень важным применением булевой алгебры. Пусть уравнение $f(u, v, w, \ldots, x) = 1$ описывает зависимость состояния устройства X от переменных u, v, w... Тогда функция $V_X = f(u, v, w, \ldots, x)$ описывает условия возможности изменения состояния устройством X, причем $V_X = 0$ означает запрещение, а $V_X = 1$ — разрешение изменения. Переменные $u, v, w, \ldots$ могут описывать не только устройства, управляющие X, но также инструкции и сигналы для обслуживающего персонала. Рассматривается применение алгебры замков к электрическим замкам и замкам, отпираемым ключами, а также к сигнализации на железных дорогах.

Перед текстом доклада приводится вступительная речь Мабийо (A. Mabillot).

Примечание референта. Автор и Мабийо допускают ряд высказываний в духе кибернетики. Не учитываются работы советских авторов по математической логике. *Г. Н. Поваров*

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

2430. Обучение цифровой вычислительной машины (Simple learning by a digital computer), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, Sept., 1953, 55—61 (англ.)

Описывается программа, составленная для вычислительной машины Кембриджского университета (ЭДСАК), по которой машина выполняет действия, которые можно назвать моделью процесса выработки условных рефлексов у живого организма.

Один этап действия машины, характеризующийся моментом времени t, состоит в том, что наблюдатель вводит в машину «возбуждение» s_t в виде положительного числа, пропорционального интенсивности возбуждения. На это возбуждение машина может или «отозваться» каким-нибудь из 5 возможных «рефлексов» R_i ($i = 1, \ldots, 5$), или никак не «отозваться», если возбуждение окажется слишком слабым. В первом случае печатается номер «рефлекса» i, во втором — какой-нибудь особый символ. Получив ответ, наблюдатель может сообщить машине свое отношение к вызванному рефлексу посылкой в машину соответствующего числа a_t, положительного в случае желательности рефлекса, нуля в случае нейтральности и отрицательного при нежелательности рефлекса. Восприняв a_t, машина готовится к приему следующего возбуждения s_{t+1}. Последовательность таких этапов и составляет процесс «обучения» цифровой вычислительной машины. Приведена таблица, иллюстрирующая работу машины ЭДСАК по этой программе. По этой таблице можно наблюдать некоторые элементарные явления, обычно происходящие при выработке условных рефлексов у живого организма: образование новых рефлексов, уничтожение нежелательных рефлексов, относительная устойчивость выра-

ботавшихся рефлексов, «привыкание» к некоторым случайно выработавшимся рефлексам, наконец, переход в «летаргическое состояние» при длительном возбуждении.

В момент времени t с каждым из «рефлексов» R_i связано определенное «пороговое состояние», характеризующееся числом S_{it}, находящимся в машине. Восприняв возбуждение s_t, машина выбирает из S_{it} ($i = 1, \ldots, 5$) наибольшее число S_{jt} и сравнивает $S_{jt} + s_t$ с некоторым постоянным числом T — «порогом возбудимости». Если $S_{jt} + s_t \leqslant T$, машина не отзывается на возбуждение, если же $S_{jt} + s_t > T$, машина отзывается рефлексом R_j. Если наибольших чисел S_{jt} несколько, выбирается одно из них наудачу. Восприняв от наблюдателя его отношение a_t к вызванному рефлексу, машина из чисел S_{it} для времени t формирует числа $S_{i,t+1}$ для следующего момента времени $t+1$. Если R_j — рефлекс, вызванный во время t, то

$$S_{j,\,t+1} = S_{jt} + a_t + 1 + N_{jt} - N_{j,\,t-1} - d\,(S_{jt}, t),$$

а для всех остальных $i \neq j$

$$S_{i,\,t+1} = S_{it} + N_{it} - N_{i,\,t-1} - d\,(S_{it}, t).$$

В 1-м случае единица прибавляется для образования эффекта «привыкания». N_{kt} для одного из k ($k = 1, \ldots, 5$), выбираемого наудачу, — «псевдослучайное» число из интервала $-5 \leqslant N_{kt} \leqslant 5$; для остальных k $N_{kt} = 0$. «Псевдослучайные» числа в этой задаче получаются по рекуррентному процессу: «псевдослучайное» число u_{n+1} получается как число, состоящее из средних разрядов квадрата u_n; как производились случайные выборки «наудачу», в статье не говорится. Числа N_{kt} накладывают случайные флюктуации на средний уровень пороговых состояний.

Числа $d(S_{kt}, t)$ вычитаются для создания эффекта перехода в «летаргическое состояние», когда все S_{kt} слишком малы, чтобы удовлетворялось $S_{kt} + s_t > T$. d отлично от нуля только в интервалах от $t = 5n$ до $t = 5n + 1$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$ В этих интервалах $d = 1$ для $S_{kt} > 1$, $d = -1$, когда $s_{kt} \leqslant 0$, и $d = 0$, когда $S_{kt} = 1$. Отрицательное d берется для того, чтобы предупредить преждевременную «летаргию».

Начальные значения всех пороговых состояний произвольны. В примере, рассматриваемом в статье, все упоминаемые числа целые и характеризуются следующими величинами и пределами изменения: все $S_{k0} = 3$, $T = 7$, $s_t \leqslant 3$, $|a_t| \leqslant 4$. *А. П. Ершов*

2431. Логические, или нематематические, программы. Стрейчи (Logical or non-mathematical programmes. Strachey C. S.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, Sept., 1953, 46—49 (англ.)

Разбирается созданная автором для Манчестерской вычислительной машины программа для игры в шашки. Для реализации игры в шашки надо иметь способ изображения позиций и ходов, а также иметь некоторые формальные критерии оценки позиции и выбора сооответствующего хода («стратегия»).

Позиция, т. е. расположение шашек, изображается тремя 32-значными двоичными числами W, B и K. Каждый разряд соответствует одному из 32 игровых полей. Единица в данном разряде означает наличие шашки на соответствующем поле. Число W изображает расположение всех белых шашек, B — всех черных шашек, а K — всех белых и черных дамок. Из этих трех чисел можно получить все необходимые сведения о расположении шашек. Ход реализуется совокупностью поразрядных логических операций и операций сдвига, которые надо произвести над числами W_n, B_n, K_n, чтобы получить числа W_{n+1}, B_{n+1}, K_{n+1}, характеризующие позицию, к которой приводит данный ход.

Сущность стратегии состоит в том, что машина делает все возможные ходы в данной позиции и все возможные ответы противника. Подобный анализ распространяется на 6 ходов вперед (3 хода белых и 3 хода черных). На основе рассмотренных вариантов и выбирается наиболее благоприятный ход. В дальнейшем стратегия усложнилась включением в возможности машины простейших комбинаций с жертвой шашки и «возвратом потерь» не позже, чем через два хода.

При игре машина воспринимает ход противника, образует исходную позицию, производит ее оценку, выбирает ход и печатает его.

Приводится партия, «сыгранная» между автором статьи и машиной (неоконченная). Партия игралась по правилам, несколько отличающимся от принятых в СССР. Уровень игры с обеих сторон был очень невысоким. Анализ партии подтверждает мнение автора, что если в начале и в середине игры машина «играет» более или менее разумно, то для окончаний нужно создавать особую стратегию.

А. П. Ершов

2432. Влияние техники программирования на конструкцию вычислительных машин. Хоппер, Мокли (Influence of programming techniques on the design of computers. Hopper Grace M., Mauchly John W.), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 10, 1250—1254 (англ.)

Говорится о преимуществах и недостатках электронных машин общего и специального назначения. Далее дается общий обзор того, что сделано в Англии и Америке в отношении автоматизации программирования к началу 1953 г.

Описываются: 1) общие принципы построения библиотеки подпрограмм, компилирующей подпрограммы, системы «коротких кодов», «псевдокодов» и подпрограммы, связанные с их использованием, 2) метод субпрограммирования, состоящий в развертке циклов в линейную программу, что иногда экономит время вычислений, 3) программа-оператор, составленная Карименианом (Kahrimanian), дифференцирующая аналитические выражения и позволяющая получать выражения производных до 99 порядка и вычислять их значения.

Далее авторы делают ряд оптимистических прогнозов о возможности выбора системы кодирования, которая будет состоять в выписывании математических формул и указании, что с ними делать.

Л. Н. Королев

2433. Методы моделирования в истинном масштабе времени задачи о твердом теле. Грей,

Рубинов, Сохон (A technique for real time simulation of a rigid body problem. Gray H. J., Jr, Rubinoff M., Sohon H.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1953, **7**, № 42, 73—77 (англ.)

С изобретением быстродействующих вычислительных машин стало возможным их использование для решения задач в истинном масштабе времени, т. е. использовать их как инструмент, воспринимающий и отвечающий на возбуждения из внешней среды. Машины, предназначенные для этих целей, должны отвечать следующим требованиям: 1) машина должна вычислять достаточно быстро, чтобы реагировать на наиболее быстрые возбуждения; быстрота решения соответствующих уравнений является важнейшим требованием; 2) так как невозможно точно предусмотреть случайные возбуждения типа грубых нарушений, то либо ответ должен задерживаться для выяснения, не является ли возбуждение таким, что его надо отбросить, либо должна быть допущена «разумная» величина погрешности, либо то и другое вместе; 3) все параметры должны быть ограничены, когда бы и где бы они ни появились, так как в любой вычислительной машине область представимых чисел ограничена; 4) вычисления должны быть стабильны.

Статья посвящена рассмотрению преобразований уравнений движения вращающегося твердого тела с фиксированным центром тяжести, которые производятся с целью ускорить процедуру счета и сделать ее стабильной. При этом, до некоторой степени, в жертву принесена точность, но зато исключены особенности.

Обычные уравнения, в которых параметрами служат углы Эйлера, имеют вид, неудобный для вычислений на машине, так как $\cos\theta$ входит в знаменатель двух уравнений, и они становятся неопределенными при некоторых положениях вращающегося тела. Поэтому в качестве параметров, определяющих положение твердого тела, выбираются 9 направляющих косинусов осей, жестко связанных с телом, относительно неподвижной системы координат. Дифференциальные уравнения принимают вид

$$\begin{aligned} l_i &= rm_i - qn_i \\ \dot{m}_i &= pn_i - rl_i \\ \dot{n}_i &= ql_i - pm_i, \\ i &= 1, 2, 3, \end{aligned}$$

где l_i, m_i, n_i — направляющие косинусы 1-й, 2-й и 3-й подвижных осей, p, q, r — компоненты скорости центра тяжести.

Таким образом решается система дифференциальных уравнений и конечных соотношений, связывающих направляющие косинусы. Так как в машине, для которой предназначены эти преобразования, числа представляются меньшими 1, направляющие косинусы заменены «псевдокосинусами», равными M-й части первоначальных.

Порядок вычислений состоит в следующем: используя дифференциальные уравнения, вычисляют l_3, m_3, n_3; далее вычисленные значения этих параметров исправляются с помощью формул, которые не учитывают квадрат ошибки.

Из другой группы дифференциальных уравнений вычисляются l_2, m_2, n_2, которые исправляются так, чтобы вектор (l_2, m_2, n_2) был ортогонален вектору (l_3, m_3, n_3). Таким же образом находят l_1, m_1, n_1.

Описывается другой метод поправки значений способом ортогонализации. В этом методе две из величин l_2, m_2, n_2 полагаются точными, а третья выбирается так, чтобы вектор 2 был ортогонален вектору 3. Приводятся соответствующие формулы и их вывод. Предлагаемый авторами метод не содержит вычислений тригонометрических функций и извлечений квадратных корней, замедляющих работу машины.

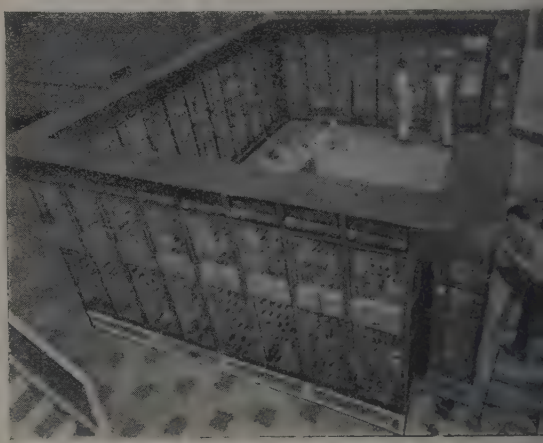
Работа была выполнена по заказу Управления военно-морских исследований (Office of Naval Research, Special Devices Center). *Л. Н. Королев*

2434. ЮДЕК (UDEC), Phys. Today, 1954, **7**, № 3, 25—26 (англ.)

Краткое сообщение о том, что фирмой «Берроус» (Burroughs Corp.) построена и установлена в вычислительной лаборатории Уэйнского университета (Wayne University) в Детройте цифровая электронная вычислительная машина ЮДЕК (UDEC — Unitised Digital Electronic Computer). Машина состоит из стандартных блоков. *В. Д. Князев*

2435. Вычислительный центр ЮДЕК-II фирмы «Берроус» (Burroughs UDEC-II computation center), Electr. World, 1954, **142**, № 16, 194 (англ.)

Краткое сообщение о вычислительном центре фирмы «Берроус» (Electronic Instruments Div., Burroughs Corp.) в Филадельфии. Основным агрегатом центра является цифровая электронная вычислительная машина ЮДЕК-II (см. фото), подобная несколько более



К реф. 2435

медленной машине ЮДЕК-I в Уэйнском университете в Детройте (см. реф. 2434). Отмечается, что конструкция из стандартных блоков дает возможность построить вычислительную машину всего за 3 месяца. *Д. П.*

2436. Электронные вычислительные машины многосторонни, но и они имеют свои ограничения. Сандфорд (Electronic computers are versa-

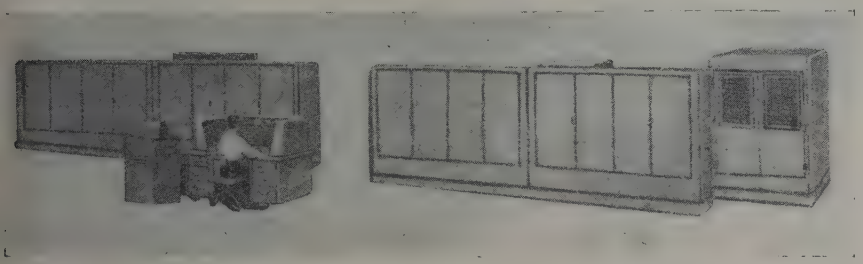
tile — but they have their limits. Sandford Lawrence), Municip. J., 1954, **62**, № 3197, 1190—1191 (англ.)

Кратко и в общих чертах описывается устройство цифровых вычислительных машин, в качестве примера применения машин берется вычисление подоходного налога.

Приводятся приблизительные цены на электронные вычислительные машины. В США, в зависимости от типа, стоимость машины исчисляется от 60 000 до 1 000 000 долларов. Фирма «Берроус» (Burroughs) запланировала на постройку машины ЮДЕК (UDEC) 500 000 долларов. Арендная плата за использование машины ИБМ-701 составляет 11 900 долларов в месяц. В Англии фирма «Ферранти» (Ferranti) оценила свою универсальную вычислительную машину в 90 000—100 000 фунтов, включая обучение обслуживающего персонала. Стоимость машины 402 фирмы «Эллиотт» (Elliott) 25 000 фунтов. Вычислительная машина «Голлерит» (Hollerith) стоит 15 000—17 000 фунтов. Электронные множительные перфораторы фирмы «Паурс — Сеймас» (Powers — Samas) разных типов стоят 5000—7000 фунтов, а электронная вычислительная машина с программированием на перфокартах этой же фирмы — 15 000 фунтов. *В. Д. Князев*

2437. Как выбрать электронную систему... (How to choose the electronic system...), Computers and Automat., 1954, **3**, № 4, 33 (англ.)

Рекламное объявление фирмы «Ремингтон Ранд». Приведен общий вид электронной вычислительной



К реф. 2437

машины ИРА-1101 (см. фото), предшественницы машины ИРА-1103 (РЖМат, 1953, 933; 1954, 2397—2399 и др.).

2438. Новая вычислительная машина улучшит прогноз погоды (New computing machine improves weather forecasting), Australas Engr, 1953, № 1, 101 (англ.)

Сообщается о постройке вычислительной машины специально для Службы предсказания погоды. Эта машина под названием МАНИАК (РЖМат, 1954, 3100) построена Высшим исследовательским институтом в Принстоне (Institute for Advanced Study). Чтобы обеспечить быстрое и точное предсказание погоды, необходимо решить сложное уравнение, связывающее большое количество факторов, которые описывают состояние масс воздуха. Решается система уравнений для атмосферы высотой 20 *км*, разбитой на объемы по 960 $км^3$, для каждого из которых составляется свое уравнение. Для предсказания погоды за 24 часа вперед необходимо проделать около 10^9 умножений 10-разрядных чисел, что на машине МАНИАК занимает 2,5 часа. Ожидают, что МАНИАК обеспечит примерно 90%-ную точность прогнозов погоды.. *Н. Я. Матюхин*

2439. Конференция по применению быстродействующих вычислительных машин (Conference on high-speed computing), Meteorol. Mag., 1954, **83**, № 985, 193—195 (англ.)

13—15 мая 1954 г. состоялась конференция по применению вычислительных машин для решения проблем метеорологии и океанографии, созванная Калифорнийским университетом Лос-Анжелоса и Национальным научным обществом Америки. Приводится краткий обзор докладов.

Решение уравнений для предсказания погоды в США на сутки вперед при использовании модели поля давлений в 3 уровня требует около 1 млн. умножений и делений, около 10 млн. сложений и вычитаний (всего 30 млн. операций, считая необходимые логические и вспомогательные операции) при использовании быстродействующей счетной машины. Существующие машины могут выполнить это в течение 45 мин.; есть возможность уменьшить это время до 15 мин.

Модель в 5 уровней потребует не более 3 час. для решения на машине уравнений, необходимых для предсказания погоды на сутки вперед, а предсказание на 5 суток вперед по модели в 3 уровня может быть выполнено за 20 час. машинного времени, однако ценность такого предсказания проблематична. На конференции обсуждалась трудность введения в машину большого числа начальных данных.

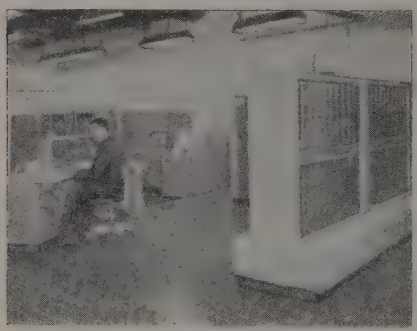
С июня 1954 г. в США было намечено учредить Объединенную группу численного предсказания погоды (Joint Numerical Weather Prediction Unit) со штатом в 32 человека, из которых половина — метеорологи, а остальные — математики, специалисты по программированию, операторы для работы на машинах. Машина новейшей конструкции должна быть поставлена в это учреждение в октябре 1954 г.

С начала 1955 г. предполагается начать выпускать карты погоды ежедневно (или по два раза в день) для сравнения с картами, на которых записана действительно бывшая погода с тем, чтобы в 1955 г. полностью перейти на составление прогнозов с помощью машины. *В. К. Зейденберг*

2440. Вычислительная машина, спроектированная для конторской работы (Electronic brain designed for office work), Mach. Design, 1954, **26**, № 8, 183 (англ.)

Краткая заметка о новой электронной вычислительной машине ИБМ-702 (РЖМат, 1955, 1990),

являющейся дальнейшим развитием машины ИБМ-701 (РЖМат, 1954, 1853—1856 и др.). Приведены



К реф. 2440 Фиг. 1

К реф. 2440 Фиг. 2

фотографии общего вида машины (фиг. 1) и пульта управления (фиг. 2). *Д. П.*

2441. Вычислительная машина с запоминающим устройством на магнитном барабане (Magnetic drum calculator), Tech Engng News, 1953, **35**, № 2, 54 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой ИБМ (International Business Machines Co.) новой электронной десятичной цифровой вычислительной машины. Эта машина предназначена для применения в различных областях науки, промышленности и торговли. В качестве возможного применения предполагается подсчет страховых премий, расчет необходимого количества деталей при заданном графике производства, подсчет запасов, а также различные операции, связанные с выборкой данных из таблиц и графиков и т. д.

Машина состоит из трех блоков — блока магнитного барабана с электронным арифметическим и управляющим устройством, блока ввода и вывода данных и преобразователя.

Все арифметические операции вычислительной машины управляются программой, которая может быть введена на магнитный барабан автоматически с перфокарт или вручную с панели оператора.

В качестве запоминающего устройства служит магнитный барабан, имеющий 10 *см* в диаметре и 30 *см* в длину, вращающийся со скоростью 13 000 об/мин. Запоминающее устройство имеет до 20 000 ячеек и может принимать до 2 000 рабочих команд, управляющих выполнением различных операций. Арифметическое устройство может суммировать 10-значные десятичные числа до получения 20-значных сумм со скоростью 200 чисел в 1 сек., умножать 10-значные числа с получением 20-значных произведений со скоростью 100 в 1 сек. и делить 19-значные числа на 10-значные с получением 10-значных частных и 10-значных остатков со скоростью 80 в 1 сек. Ввод данных с перфокарт производится со скоростью 200 перфокарт в 1 мин. и вывод результатов — со скоростью 100 перфокарт в 1 мин.

См. также РЖМат, 1954, 4618; 1955, 1989.

Л. М. Шехтман

2442. Вычислительная машина с магнитным барабаном (Drum calculator), Electronics, 1953, **26**, № 10, 320, 322 (англ.)

См. реф. 2441.

2443. Как выбрать большую цифровую вычислительную машину. Решение транспортных проблем при помощи автоматических вычислительных машин. Келлер (How to select a large scale digital computer. Solving automotive problems with automatic computers. Keller Allen), Automot. Inds, 1953, **109**, № 5, 56—57, 104 (англ.)

Предполагается, что вычислительные машины, разработанные к 1955 г., будут иметь следующие характеристики: 1) входные и выходные данные в виде 10-значных десятичных чисел или в виде букв алфавита; 2) скорость вычислений 100 000 сложений или вычитаний в 1 сек. и 20 000 умножений или делений в 1 сек; 3) внутреннее запоминающее устройство должно обладать емкостью в 10 000—20 000 10-значных десятичных чисел; 4) внешнее запоминающее устройство должно иметь практически неограниченную емкость; 5) сбои в работе машины не чаще, чем 1 раз на 1 млрд. операций; 6) вероятная арендная плата около 200 000 долларов в год и розничная цена от 500 000 до 1 млн. долларов.

Подобная машина может обеспечить решение задач, поступающих от 200 составителей программ.

Выпускаемые в настоящее время машины обладают в десять раз меньшей скоростью и емкостью запоминающего устройства при примерно такой же цене за аренду и такой же рыночной цене. Признается также, что полезно выпускать небольшие цифровые вычислительные машины с запоминающим устройством на магнитном барабане стоимостью в 40—50 тыс. долларов. *В. Д. Князев*

2444. Новый инструмент для инженеров. Решение транспортных проблем при помощи автоматических вычислительных машины. Джейкобсон, Хаски (A new tool for engineers. Solving automotive problems with automatic computers. Jacobson Arvid W., Huskey Harry D.), Automot. Inds, 1953, **109**, № 5, 52—54 (англ.)

Статья популяризирует применение автоматических вычислительных машин в области транспорта.

Сообщается, что при Уэйнском университете (Wayne University) организуется вычислительная лаборатория, финансируемая промышленниками Детройта, с бюджетом 500 000 долларов на 5 лет. В задачи лаборатории входит ознакомление административного персонала фирм с работой и возможно-

стями вычислительных машин и производство вычислений для нужд промышленности.

Дано краткое описание принципов работы автоматической цифровой вычислительной машины.

В. Д. Князев

2445. Применение электронных вычислительных машин для расчетов гидроэнергетических систем (Electronic computer applied to commission's problems), Ontario Hydro Res. News, 1953, 5, № 2, 24 (англ.)

В связи с увеличением сложности задач, которые возникали при проектировании и эксплуатации больших гидроэнергетических систем, было решено создать вычислительный центр, оборудованный электронным перфоратором фирмы ИБМ и рядом вспомогательных машин. Для решения больших задач арендуется машина фирмы «Ферранти» (РЖМат, 1953, 940), установленная в университете в Торонто.

На машине «Ферранти» была решена задача о максимальном давлении волн, возникающих при различного рода переключениях в системе. О сложности задачи говорит тот факт, что давление волны зависит от длины и конфигурации труб, количества отводов, размеров и количества резервуаров, скорости потока и скорости переключений. На программирование задачи потребовалось около двух недель работы нескольких высококвалифицированных математиков.

Задача была решена в течение 5 мин., из них 1 мин. ушла на ввод программы, 2 — на выполнение расчетов и 2 — на печать. Эксперименты подтвердили расчетные данные.

Л. С. Легезо

2446. Вычислительные машины, ускоряющие техническое проектирование (Calculators speed engineering projects), Amer. Aviat., 1953, **17**, № 12, 44, 47 (англ.)

Сообщается о применении быстродействующих цифровых машин в самолетостроении, где они дают значительную экономию времени при решении сложных технических задач.

Используя электронную цифровую машину ИБМ-701 (РЖМат, 1954, 2375—2377), фирма «Локхид» (Lockheed Aircraft Corp.) решила систему из 16 уравнений (задача флаттера) за 1/2 недели; стоимость такой работы оценивается в 5 000 долларов.

Решение этой задачи на 4 клавишных машинах заняло бы 66 недель; стоимость работ при этом 26 000 долларов.

И. М. Старостин

2447. Институт численного анализа (Numerical analysis institute), Radio and Telev. News, 1953, **50**, № 4, Radio-Electronic Engng Sec., 18 (англ.)

Сообщается о решении ряда задач для авиации на электронной вычислительной машине СВАК (SWAC-NBS Western Automatic Computer; РЖМат, 1954, 3094), построенной и эксплуатируемой Институтом численного анализа. Приводится фотография машины.

Т. М. Александриди

2448. Новая счетная машина ОАРАК (New «OARAC» computer), Wisconsin Engr, 1953, **58**, № 3, 33 (англ.)

См. РЖМат, 1954, 1842—1843.

2449. Быстрый прогресс в развитии электронных вычислительных машин. Сандфорд (Rapid progress in the development of electronic computers. Sandford Lawrence), Municip. J., 1954, **62**, № 3196, 1124—1125 (англ.)

Дается краткий исторический обзор развития вычислительной техники. Упоминается ряд машин основных фирм США и Англии, работающих в области вычислительной техники, в том числе ЭНИАК, ССЕК (SSEC — Selective Sequence Electronic Calculator); МАРК-III; БИНАК; ЭДВАК; УНИВАК; БЛК (BLC — Burroughs Laboratory Computer); ЮДЕК; АКЕ; ЭДСАК; ЛЕО; Манчестерская универсальная машина; ХЕК (HEC — Hollerith Electronic Computer); ПКК (PCC — Programme Controled Computer).

А. Б. Залкинд

2450. Настольное моделирующее устройство заменяет большие машины (Desk-top analog computers replace large units), Prod. Engng, 1954, **25**, № 3, 234 (англ.)

Сообщение фирмы «Ривс Инструмент» (Reeves Instrument Corp.) о выпуске двух новых настольных моделирующих устройств РЕАК С301 (REAC C301) и РЕАК С302 (REAC C302). Первая из этих машин имеет размеры 50 × 65 × 50 *см* (см. фото). Обе машины предназначены для решения дифференциальных уравнений шестого порядка. Решение получается с точностью до 0,1 %. В машине С301 задача коммутируется с помощью шнуров на передней панели, в другой система коммутации более сложная. Результат вычислений вычерчивается на бумажной ленте с помощью специальной приставки. Решение задачи может проходить периодически на частоте, позволяющей рассмотреть результат вычислений на экране осциллографа. Обе машины имеют по 12 усилителей с индивидуальной стабилизацией нуля. Уход нуля составляет 0,25 *мв* в день. Каждый усилитель имеет усиление по постоянному току $15 \cdot 10^6$, выходное напряжение ± 100 *в* и индикатор переполнения.

К реф. 2450

Л. С. Легезо

2451. Применение вычислительных машин для задач динамики в самолетостроении. Холл, Рутрауфф, Дилл (Applications of computers to aircraft dynamic problems. Hall B., Ruthrauff R., Dill D.), Proc. Western Comput. Conf. (Febr. 1953), New York, 1953, 128—139 (англ.)

Фирма «Дуглас» (Douglas Aircraft Co.) для решения аэродинамических задач при проектировании самолетов и ракет успешно применяет цифровые вычислительные машины и моделирующие устройства.

Применение вычислительных машин существенно уменьшает время проектирования, позволяя произвести расчеты для многих вариантов. В качестве

примеров рассматриваются математические формулировки ряда задач и методы их решений.

На электронном перфораторе ИБМ (IBM) решались задачи поперечной устойчивости самолета, задача флаттера и др., вычислялась траектория движения ракеты. Для решения нелинейной задачи определения нагрузок на крыло при выходе из пикирования применялось моделирующее устройство РЕАК (REAC). Для отдельных членов уравнений составлены блок-схемы соединения решающих элементов.

Сообщается, что в настоящее время фирма для определения флаттера крыла применяет моделирующее устройство Калифорнийского технологического института (California Institute of Technology analog computer), которое дает возможность легко изменять физические параметры конструкции. Крыло разбивается на секции, которые моделируются электрическими *RLC*-схемами. Аэродинамические силы представляются решающими усилителями.

Л. А. Кожарский

2452. **Расчет характеристик шасси самолета на электронном моделирующем устройстве. Дрейк, Фостер** (Airplane landing gear performance solutions with an electronic analog computer. Drake D. W., Foster H. W.), Proc. Western Comput. Conf. (Febr. 1953), New York, 1953, 86—97 (англ.)

Сообщается о результатах расчета характеристик амортизационной стойки шасси с колесом на электронном моделирующем устройстве «Боинг» (Boeing electronic analogue computer). Расчет производился компанией «Локхид» (Lockheed Aircraft Corp.).

12 дифференциальных уравнений, описывающих работу идеализированной стойки с масляно-пневматическим амортизатором, набирались на четырех моделирующих устройствах «Боинг». Приводится система уравнений, блок-схема набора задачи и таблица вводимых констант. Для решения использовались 45 решающих усилителей. Нелинейности моделировались ограничителями и реле. Приводятся графики рассчитанных характеристик и данные, полученные при испытаниях конструкции на копре.

Значительное расхождение наблюдалось при больших ударных нагрузках в конце обжатия амортизатора. Тормозные нагрузки, определенные на моделирующем устройстве, оказались заниженными.

Указывается, что причинами этих отклонений является неточность некоторых констант и довольно приближенное описание сил, действующих на амортизационную стойку.

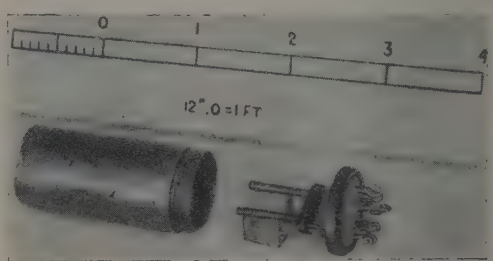
Отмечается, что уточнение констант и явлений, происходящих в стойке, даст возможность широко применять моделирующие устройства на первых стадиях конструирования. *Л. А. Кожарский*

2453. **Электронная вычислительная машина экономит время конструктора. Решение транспортных проблем при помощи автоматических вычислительных машин** (Parts maker saves with electronic computer. Solving automotive problems with automatic computers), Automot. Inds, 1953, 109, № 5, 55—56 (англ.)

Лаборатория фирмы «Вудуорд Гавернор» (Woodward Governor Co.) проводила на электронном вычислительном устройстве исследование работы дизельного двигателя с регулятором скорости. Система двигатель — регулятор описывалась системой из двух дифференциальных уравнений первого порядка. Целью исследований был выбор оптимальных параметров регулятора (постоянной времени и коэффициента усиления). *В. Д. Князев*

2454. **Вычислительный элемент миниатюрных моделирующих устройств, основанный на передаче тепла** (Heat transfer is basis for tiny analog computer component), Amer. Machinist, 1954, 98, № 5, 148 (англ.)

Сообщение фирмы «Арма» (Arma Corp.) о выпуске вычислительного элемента для моделирующих устройств, основанного на передаче тепла (РЖМат, 1954, 1869, 4948). Элемент оформлен (см. фото;



К реф. 2454

шкала градуирована в дюймах) в виде герметического цилиндрического блока, длиной около 5 *см* и диаметром около 1,5 *см*; блок соединяется со схемой с помощью штырькового разъема. С помощью элемента можно выполнять сложение, вычитание, деление, умножение, интегрирование и основные операции векторного исчисления. Входной электрический сигнал превращается в тепло на четырехполюснике. Сигнал, пропорциональный дифференциалу температуры, и входной сигнал подаются на мост Уитстона. Выходной сигнал пропорционален разбалансу моста. Фирма указывает, что компактность, точность, надежность устройства позволяют применять его для навигации на сверхзвуковых скоростях, в устройствах орудийной наводки и управления снарядами, а также в устройствах для автоматизации механизмов и производственных процессов.

Л. С. Легезо

2455. **Моделирующее вычислительное устройство, основанное на передаче тепла** (Analog computers based on heat transfer), Prod. Engng, 1954, 25, № 4, 222 (англ.)

См. реф. 2454.

2456. **Моделирующее устройство типа 16-31R** (Type 16-31R computer), Proc. I. R. E., 1954, 42, № 2, 48A (англ.)

Сообщение фирмы «Электроник Ассошиэйтс» (Electronic Associates Inc.) о выпуске в 1954 г. нового моделирующего устройства типа 16-31R. Модель 16-31R имеет 20 операционных усилителей и 4 множительных устройства. Приведено фото.

Н. Ф. Семикова

2457. **Моделирующее устройство для расчета антенных систем. Сарага, Хадли, Мосс** (An aerial analogue computer. Saraga W., Hadley D. T., Moss F.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1953, Apr., 201—224 (англ.)

Приводится описание экспериментального образца электронного моделирующего устройства для вычисления диаграммы излучения плоской антенной системы. Диаграмма излучения, полученная моделирующим устройством, представляется в виде кривой на экране катодолучевой трубки. *М. Л. Быховский*

2458. **Электрическая цепь, моделирующая извлечение квадратного корня. Бакстер** (A square root-law circuit. Baxter I. G.), Electronic Engng, 1954, **26**, № 313, 97—99 (англ.)

Описывается усилитель с отрицательной обратной связью, выходное напряжение которого пропорционально квадратному корню из входного. Цепь нелинейной обратной связи состоит из сопротивлений и малогабаритных селеновых выпрямителей. В усилителях такого типа зависимость между напряжениями на входе и выходе представляет собой кусочно-линейную функцию, близкую к параболе. Приведена практическая схема, снабженная набором потенциометров для подбора наилучшей аппроксимации. *Н. Ф. Семикова*

2459. **Увеличение надежности работы запоминающего устройства Вильямса. Шуман** (Improvement of Williams memory reliability. Schumann R.), Proc. Assoc. Comput. Mach., Meeting at Toronto, Ont., 1952, Sept., 1953, 149—153 (англ.)

Описывается система с «двойным считыванием», представляющая собой систему «двойная точка» с небольшими изменениями. По мнению авторов, эта система является одной из лучших по коэффициенту повторных обращений.

Запоминающая ячейка состоит из двух расположенных рядом точек. При записи «1» вторичным катодом служит левая точка, при записи «0» — правая. При считывании обе точки ячейки прощупываются лучом по очереди: сначала левая, затем правая. В результате этого получаются два импульса нормально разной полярности. Если считывается «1», то второй импульс положителен, если «0» — отрицателен. После усилителя стоит амплитудный дискриминатор, управляющий схемой подсветки трубки. При отсутствии сигнала от схемы сравнения перезаписывается правое пятно (регенерируется нуль), в противоположном случае — левое (регенерируется единица).

Так как обе точки ячейки расположены очень близко, то в первом приближении предполагается, что любая причина, вызывающая изменение величины считываемого импульса (засев вторичными электронами, расфокусировка и т. д.), будет воздействовать одинаково на сигналы с обеих точек ячейки. Даже при большом засеве, когда нормально отрицательный импульс одной из точек ячейки станет положительным, амплитуда его будет все же меньше амплитуды нормально положительного сигнала, и считывание произойдет правильно.

Схема тракта считывания построена следующим образом. После обычного усилителя стоит линейный вентиль, т. е. вентиль, сохраняющий амплитудные соотношения сигналов. Стробирующий импульс линейного вентиля установлен так, чтобы пропустить сигнал считывания и не пропустить сигнала «выключения луча».

Далее стоит схема, растягивающая сигнал (пиковый детектор), предназначенная для запоминания амплитуды первого считываемого импульса. Если амплитуда второго импульса больше первого, то на выходе растягивающей схемы появляется ступенька напряжения. Сигнал пикового детектора дифференцируется и поступает на вентиль, открытый только во время прихода второго сигнала.

В случае, если считывается «1», импульс вентиля перебрасывает триггер, управляющий через систему вентилей током луча.

Для исследования улучшения, получаемого при применении системы с двойным считыванием, было испытано 12 трубок типа 5 CPIA в режимах обычного и двойного считывания. Оказалось, что описанная система увеличивает допустимое количество повторных обращений от 2 до 40 раз для разных трубок при средней величине коэффициента улучшения 10. Из 7 трубок типа 3 JPI, допускавших до 1100 обращений в одну ячейку при обычной системе считывания, 6 трубок выдержали по 3500 обращений и одна 2048.

Испытание каждой трубки на допустимое число обращений производилось во всех ячейках растра из 1024 элементов. *В. Н. Лаут*

2460. **Ультразвуковые линии задержки** (Ultrasonic delay lines), Electronics, 1953, **26**, № 7, 210 212, 214, 216 (англ.)

Сообщение о результатах разработки линий задержки из плавленого кварца в ультразвуковой лаборатории Аренберга (США).

Указывается, что плавленый кварц является наилучшим материалом для линий задержки, так как хорошо согласуется с пьезо-преобразователем, имеет малое затухание на высоких частотах (0,005 *дб* на 1 μсек. при 15 *Мгц*) и низкий температурный коэффициент (108×10^{-6} на 1°). Линия на 1000 μсек. может быть помещена в объеме $25\times150\times150$ *мм* и весит менее 400 *г*. Вносимые линией потери лежат в пределах 30 ÷ 45 *дб*. Полоса пропускания весьма широка (24 *Мгц* на частоте 40 *Мгц*). Линии могут работать на частоте до 60 *Мгц*.

Наличие вторичных отраженных ложных сигналов ограничивает возможности уменьшения размеров линий задержки и снижения частоты несущей.

Линии задержки могут быть изготовлены с допуском 0,01%. *Г. А. Хавкин*

2461. **Новое быстродействующее электронное запоминающее устройство, которое не теряет информации** (New high-speed electronic memory device that never forgets), Tech. Engng News, 1953, **35**, № 2, 37 (англ.)

Кратко изложен принцип действия уже известного запоминающего устройства (РЖМат, 1954, 2754). *О. В. Росницкий*

2462. **Металлические ультразвуковые линии задержки** (Metal ultrasonic delay lines), J. Franklin Inst., 1954, **257**, № 4, 317—319 (англ.)

Сообщение Национального бюро стандартов (NBS) (США) об испытании твердых линий задержки из различных металлов и сплавов с целью определения возможности их применения в счетных машинах и артиллерийских установках. Было исследовано четырнадцать металлов и сплавов. Из них наибольшую температурную стабильность показали хромоникелевые стали. *Л. В. Кутуков*

2463. **Линии задержки для локационных станций и вычислительных машин. Кол, Мерфи**

(Delay lines for radar and computers. Cole Byron M., Murphy Melvin H.), Tele-Tech, 1953, **12**, № 10, 106—108, 148—153 (англ.)

Обзор различных типов линий задержки, их конструкций и возможных применений. Рассматриваются линии с сосредоточенными и распределенными постоянными и коаксиальные кабели. *Л. С. Легезо*

2464. **Комплект линий задержки** (Delay line kit), Proc. I. R. E., 1954, **42**, № 2, 41A (англ.)

Сообщение фирмы «Миллен» (James Millen Manufacturing Co.) о выпуске набора линий задержки, который позволяет получить задержку от 0,1 до 2 *мксек*. Набор предназначен для экспериментальных работ. *Л. В. Кутуков*

2465. **Сверхминиатюрная линия задержки** (Subminiature delay line), Instruments, 1953, 26, № 5, 718 (англ.)

Сообщение фирмы «Джекобс» (Jacobs Instrument Co.) о выпуске малогабаритной линии задержки на 2,5 *мксек*., которая может быть укреплена на любой панели. Затухание в линии 2 *дб*. Характеристическое сопротивление линии 2800 *ом*. *А. Б. Залкинд*

2466. **Принципы работы различных типов планиметров. Фрей** (Aplaniméterek működesi elve, különös tekintettel az alkalmazott matematikai intézet gepeire. Frey Tamas), Magyar tud. akad. alkalm. mat. intéz. közl., 1952, **1**, 253—294 (журнал вышел из печати в 1953 г.) (венг.; резюме русс., франц.)

Дается подробное описание принципов работы и конструкции полярных, линейных и радиальных планиметров, а также планиметров Стилтьеса. Систематически и подробно исследуется теория функциональных планиметров и интегриметров для вычисления интегралов вида $\int_b^a f[y(x)]dx$ и $\int_b^a f[y(x)]g(x)dx$. Дается также конкретное предложение для конструкции планиметров для решения последней задачи; после выполнения соответствующих преобразований планиметр Лоренца применим для этой цели. Статья знакомит с возможностью применения оказавшегося практически полезным планиметра Стилтьеса типа Нистрема при численной оценке определенных интегралов, определяемых несколькими параметрами. *Из резюме автора*

2467. **Тепловая изоляция** (Thermal insulation), Fuel Efficiency News, 1954, **4**, № 6,6—7 (англ.)

Описаны две счетные линейки специального назначения и довольно сложного устройства — с 5 и 4 движками. Первая предназначена для расчета экономически выгодной толщины изолирующего слоя с учетом стоимости изоляции на каждый дюйм толщины и каждый кв. фут поверхности, теплопроводности изолирующего материала, стоимости единицы сберегаемого тепла, температуры горячей поверхности, срока амортизации, диаметра изолируемой трубы (при диаметрах от 12 дюймов расчет ведется как для плоскости). Вторая линейка облегчает вычисление по формуле $q=(t_{sl}-t_m)/(a:k+b:f)$, где q означает количество потерянного тепла, t_{sl} — температуру горячей поверхности, t_m — температуру окружающего воздуха, k — коэффициент теплопроводности изолирующего материала, f — коэффициент поверхности. При плоской поверхности буква a означает толщину изолирующего слоя в дюймах, b — единицу, а для трубы $a=0{,}5\,D_1 \log_e (D_2/D_1)$, $b=D_1/D_2$, где D_1 — внешний диаметр трубы, D_2 — внешний диаметр трубы вместе со слоем изоляции. Приложены фотографии. *В. М. Брадис*

2468. **Счетный диск и счетная таблица — два вспомогательных средства для наборщика. Фишер** (Rechenscheibe und Rechentafel — zwei Hilfsmittel für den Setzer. Fischer Oswald), TM, 1954, **73**, № 2, 69—71 (нем.)

Показано, как с помощью счетного диска обычного типа, т. е. счетной линейки с круговыми шкалами, можно решать некоторые простые задачи, встречающиеся в работе наборщика и сводящиеся к нескольким умножениям и делениям. *В. М. Брадис*

2469 К. **Как считают машины. Тукачинский М. С.**, 64 стр., Гостехиздат УССР, Киев, 1953, 1 р. 10 к. (укр.); 72 стр. Молдавгиз, Кишинев, 1953, 1 р. 5 к. (молдав.)

2470 Д. **Исследование сверхвысокочастотной электроники триода-усилителя. Костиенко А. И.** Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1954

2471 Д. **Автоматический строчный анализ некоторых плоских физических полей. Алексеев С. В.** Автореф. дисс. канд. тех. н., Моск. энергет. ин-т, М., 1953

2472 П. **Интегрирующая схема на электронной лампе. Леви** (Thermionic valve integrating circuits. Levy Maurice Moise) [General Electric Co. Limited, Англия]. Пат. США 2652490, кл. 250—27, 15.09.53

Схема для интегрирования импульсов одной полярности, выполненная на пентоде с включением интегрирующего конденсатора в цепь обратной связи между анодом и управляющей сеткой и коммутацией источника питания интегрирующей цепи выходными импульсами специального генератора через вспомогательный триод. *Б. Я. Коган*

2473 П. **Аппарат для записи на магнитную ленту и воспроизведения с нее. Дингли** (Magnetic tape recorder reproducer. Dingley Edward N., Jr.). Пат. США 2656419, кл. 179—100.2, 20.10.53

Устройство для записи и воспроизведения электрических сигналов и синхронизирующих импульсов на магнитную ленту. При отклонении скорости движения ленты от средней величины синхронизирующие сигналы используются для управления перемещением подвижного воспроизводящего устройства таким образом, чтобы уменьшить относительное изменение скорости; кроме этого, предусмотрена регулировка средней скорости движения ленты. *В. В. Карибский*

2474 П. **Устройство для магнитной записи. Робертс** (Magnetic recording system. Roberts Bruce) [The International Electronics Co.]. Пат. США 2653819, кл. 274—4, 29.09.53

Устройство для записи звука на немагнитный лист, покрытый магнитным слоем, с помощью записывающей головки, имеющей возможность перемещения по двум координатам. *В. В. Карибский*

2475 **П. Стирающая магнитная головка. Кларк** (Erasing head for magnetic recording. Clark Donald L.) [Stromberg-Carlson Co.]. Пат. США 2655562, кл. 179—100.2, 13.10.53

Головка для стирания магнитной записи с ленты. Головка имеет несколько зазоров, в которых создается переменное магнитное поле. При протягивании ленты последовательно сквозь эти зазоры переменное магнитное поле размагничивает ленту.

В. В. Карибский

2476 **П. Записывающая головка. Исберг** (Recorder head. Isberg Reuben A.) [The United States of America as represented by the Secretary of the Navy]. Пат. США 2656420, кл. 179—100.2, 20.10.53

Устройство для поперечной магнитной записи на движущуюся ленту.

2477 **П. Магнитная записывающая головка. Коннелл** (Apparatus for magnetic recording. Connell Lawrence H.). Пат. США 2655561, кл. 179—100.2, 13.10.53

Конструкция магнитной головки для продольной записи на магнитном слое.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

2478. **Использование и возможности электроники в телефонии. Флауэрс** (The uses and possibilities of electronics in telephone exchanges. Flowers T. H.), Journal UIT, 1953, Oct., № 10, 148e — 163e (англ.)

Автор считает, что огромное количество элементов, применяемых ныне в телефонии, — различного рода реле, сложные контактные системы, усилители, задержки по времени, запоминающие устройства, всякого рода логические схемы — с успехом могут быть заменены электронными устройствами. В качестве таковых описываются диодные и триодные ключи на электронных лампах, кристаллических триодах и газоразрядных лампах, многополюсные переключатели на электронных и газоразрядных лампах и на электронолучевых трубках специальной конструкции. Для скоростной передачи кодов вместо обычных электромеханических устройств можно использовать систему с фотоэлементами, получающими информацию с перфокарт. Приведена схема триггера на точечно-контактном кристаллическом триоде.

При сравнении электромеханических устройств с электронными главными недостатками первых автор считает повреждения контактов, механический износ деталей и плохие контакты в соединениях. Но в электронных устройствах имеются соответственные недостатки, а именно: разрушение оксидного слоя на катодах ламп, старение элементов электронных схем (сопротивлений, конденсаторов) и аналогичная проблема контактных соединений. Кроме того, существенным недостатком электронных устройств является то, что, как правило, ими рассеивается мощность одного порядка с переключаемой, тогда как электромеханические устройства рассеивают мощность, во много раз меньшую. Существенными преимуществами электронных устройств является большая скорость работы и во многих случаях большая компактность и меньшая стоимость.

Отдельно рассматриваются возможности применения электронных запоминающих устройств. Кроме того, в качестве запоминающих устройств могут использоваться электронные лампы, кристаллические триоды и пр., особый интерес представляют специальные виды запоминающих устройств, например, магнитный барабан и запоминающее устройство на ферритовых сердечниках. Их применение сильно упрощает и удешевляет аппаратуру. В заключение автор приходит к выводу, что на современном уровне развития электроники применение в телефонии чисто электронных схем пока еще неразумно. Электроника рациональна лишь в сочетании с электромеханическими устройствами.

Приводится целый ряд специальных схем на электронных и электромеханических элементах.

Л. С. Легезо

2479. **Электронные вычислительные машины и телефонная коммутация. Льюис** (Electronic computers and telephone switching. Lewis W. D.), Proc. I. R. E., 1953, **41**, № 10, 1242—1244 (англ.)

Кратко рассматриваются основные европейские и американские системы коммутации на телефонных станциях и разбирается вопрос применения электроники в коммутаторах. Отмечается отсутствие высокой надежности и неэкономичность перехода на новую электронную аппаратуру при наличии старого оборудования у абонентов.

Проводится аналогия между работой АТС и автоматической цифровой вычислительной машины.

Электронная АТС имеет, так же как и вычислительная машина, запоминающее устройство для хранения вызываемых номеров и схем коммутации и устройство управления. Наиболее существенные различия имеются между устройствами, обрабатывающими информацию: арифметическим узлом машины и коммутирующей системой АТС. Упоминается о существующих электронных устройствах ЭКАСС (ECASS — Experimental Electronically Controlled Automatic Switching System) и ДИАД (DIAD — Drum Information and Dispatcher).

Передача информации между несколькими цифровыми вычислительными машинами также требует совершенствования методов телефонной коммутации. Параллельное развитие выгодно сказывается на усовершенствовании вычислительных машин и коммутаторов.

А. В. Аваев

2480. **Центральное управление в системе автоматической междугородней телефонной связи. Ньюсом** (Common-control features in nation-wide dialing. Newsom J. B.), Bell Labs Rec., 1953, **31**, № 12, 481—485 (англ.)

Кратко рассматриваются особенности новой системы типа 4А для автоматического соединения телефонных абонентов, рассчитанной для применения на территории США и Канады. Управление вызовом производится при помощи районных автоматических подстанций. Всего предполагается иметь около 70 подстанций.

В системе 4А каждая подстанция выполняет операции автоматического преобразования, изменения, запоминания и передачи кода о вызовах на следующую подстанцию, а также соединение абонентов. На каждой подстанции может быть выбрано несколь-

ко вариантов соединений для данного вызова в зависимости от загрузки, аварий и т. п. Данные о телефонных номерах и местонахождении абонентов в системе 4А в виде отверстий нанесены на перфокарты. При передаче сигналов о вызовах чаще всего используется 6-значный код.

Приводится упрощенная блок-схема подстанции системы 4А. В системе имеется устройство, контролирующее правильность работы.

Описание работы отдельных узлов системы будет приведено в ряде следующих номеров журнала. *В. Б.*

2481. Система XY для печатания квитанций. **Фут** (The XY toll ticketing system. Foote H. L.), Electr. Engng, 1953, **72**, № 6, 517—522 (англ.)

Описывается система для печатания квитанций при телефонных переговорах с указанием времени, мест, продолжительности и стоимости телефонных переговоров.

Перед началом разговора абонент набирает свой собственный номер, который записывается на магнитной ленте (после автоматической проверки правильности указанного номера). На ту же магнитную ленту записывается и номер вызываемого абонента. Лента выполняется в форме бесконечной петли, длиной около 9 *м*, и на нее могут быть записаны данные в среднем для 100 телефонных переговоров.

Одновременно с началом разговора производится счет времени. Для этой цели применяется счетчик, использующий лампы с холодными катодами. Счетчик считает общее количество импульсов; каждый импульс соответствует 1 мин. времени переговоров.

Информация о текущем времени переговоров поступает в вычислительное устройство, определяющее согласно установленному тарифу величину оплаты телефонного разговора и выполненное также на лампах с холодными катодами.

По окончании разговора все данные о разговоре и размере оплаты печатаются на квитанцию. Печатание производится с помощью электрического печатающего устройства на бумажную ленту, после чего отпечатанная часть ленты отрезается и выдается как квитанция. Бумажная лента рулона имеет длину, достаточную для печатания 10 000 квитанций.

Использование системы XY целесообразно в небольших или средних по величине телефонных компаниях. Дается краткое описание ряда узлов системы XV и приводятся их фотографии. *В. Б.*

2482. Устройство считывания и буквенной записи сведений о телефонных переговорах. **Блашфилд** (A subscriber toll dialing tape reader. Blashfield W. H.), Electr. Engng, 1953, **72**, № 9, 786 (англ.)

Кратко сообщается об устройстве преобразования сведений о телефонных переговорах, как то: номеров вызывающих и вызываемых телефонов, календарных дат и времени разговора, с перфоленты на бумажные ярлыки посредством печатания соответствующих цифр на бланке ярлыка.

Данные с перфоленты вначале считываются с помощью фотоэлектрического устройства, которое затем управляет печатанием соответствующих цифр. Перфолента передвигается с помощью шагового реле. Скорость считывания 50 отверстий перфоленты в 1 сек.; скорость печатания 350 ярлыков в 1 час.

Устройство имеет около 10 электронных ламп и 100 реле телефонного типа, причем число реле для более простых устройств считывания и преобразования данных может быть уменьшено вдвое.

Приведены рисунки перфоленты и отпечатанного ярлыка после преобразования. *В. Б.*

2483 П. Авиационная электронная вычислительная машина для управления огнем. **Ла-Кост** (Electronic aircraft gun fire control computer. La Coste Lucien J. B.) [United States of America as represented by the Secretary of War]. Пат. США 2624510, кл. 235—61.5, 6.01.53

Приведена схема машины. Баллистические факторы задаются величинами потенциалов, устанавливаемых с помощью потенциометров, причем учитываются такие факторы, как скорость поворота дула, скорость ветра, давление, температура и др. Для регистрации потенциалов имеются приборы.

Л. Н. Королев

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Аболиня В. Э. 2217 Д
Абрамов А. А. 2416 К
Агмон 2390
Агнью 2273
Адонц М. Т. 2248
Азбелев Н. В. 2410 Д
Айзенштат Н. Д. 2408
Акицуки Я. 2266 РЕЦ
Алблас 2235, 2236
Александров П. С. 2148, 2362 К
Алексевич 2296
Алексеев Г. А. 2347
Алексеев С. В. 2471 Д
Алексич 2159
Амемия 2414
Андерсен 2317
Ара 2370
Арато 2396
Аржаных И. С. 2222, 2223
Аулук 2083
Ахиезер Н. И. 2160
Ацел 2259, 2406

Б

Бакстер 2458
Бамба 2093, 2094
Барбашин Е. А. 2151
Безикович 2267
Белюстина Л. Н. 2196
Бенерт — Смирнов 2154
Бер 2119
Бергман 2215 К
Берман Г. Н. 2263 К
Бермант А. Ф. 2264 К
Бёрнер 2251
Бехари 2372
Бибербах 2106
Биберман Л. М. 2243
Блашфилд 2482
Бонати — Саворньян 2153
Борсук К. 2145
Брадис В. 2420 К
Браудер 2208
Брафман 2278
Бреннер 2099
Букдал 2382
Бхатия 2256
Бхаттачария 2372

В

Вакулич А. 2257
Вандивер 2064
Вейер 2143, 2144
Вейнгарден 2102
Вейнштейн 2207
Вейсс 2328
Вентцель Т. Д. 2204
Вильямайор 2127
Вильямс 2212
Винтнер 2206
Витнер Ч. 2137
Витт 2140
Виттих 2189
Воло 2343
Врёлан 2292
Врублевская И. Н. 2191
Вудуорд 2331
Вулф 2256

Г

Галларати 2368
Галченкова Р. И. 2073 Д
Гальперин 2309
Гаттески 2280
Гахов Ф. Д. 2176
Гегелия Т. Г. 2249 Д
Гейтс 2426
Гендерсон 2409 К
Генцель 2232
Гермэнеску 2167
Гнеденко 2323 К, 2324 К
Годо 2363, 2373
Голомб 2397, 2398
Гопкинс 2361 К
Гордон 2246
Готье 2365
Гофман 2068 К
Граф 2337 К
Графф А. А. 2188
Грей 2433
Гринберг Г. А. 2238
Гриффин 2299
Гурматай 2356
Гюрсей 2378

Д

Даннетт 2330
Дембовский 2052
Девиде 2358
Дербин 2334
Дервидюэ 2364
Дёч 2290
Джейкобсон 2444
Джрбашян М. М. 2165
Джэксон 2391
Джха 2371
Дилл 2451
Дингли 2473 П
Диткин В. А. 2417 Д
До 2357, 2367
Долидзе Д. Е. 2225
Доннерт 2380
Донская Л. И. 2187
Дрейк 2452
Дресден 2079
Дувакин А. П. 2194
Дюпарк 2102, 2108 К

Е

Ерышов С. П. 2182 Д

З

Зарицкий 2152
Зарицкий М. О. 2152
Земанек 2345
Золотарев В. М. 2315
Золотарев Ю. Г. 2183 Д
Зотина Р. С. 2072 Д

И

Иванов В. К. 2166
Иванов Н. Ф. 2293
Идзуми 2156, 2157, 2158
Ийер 2168
Икеда 2379
Ильяшенко А. А. 2326 Д
Имура 2171
Ингрехэм 2377
Иноземцев О. И. 2161 Д
Исберг 2476 П
Исеки 2087
Исигуро 2413, 2414
Ишлинский А. Ю. 2227, 2233

Й

Йонеда 2335
Йордан 2140

К

Казнав 2395
Каллавей 2376
Каменский Г. А. 2202
Кампеделли 2062
Каппос 2138
Карапиколов Х. 2399
Каратеодори 2254 К
Карлиц 2090, 2095, 2100
Кац 2321
Келлер 2443
Келли 2089
Кертес 2117, 2118
Кертис 2126
Керубино 2113
Кикута 2386
Килсон 2339
Кимура 2413
Кларк 2475 П
Кларк 2412
Кли 2142
Кобаяси 2401
Койтер 2235, 2236
Кокран 2336 К
Кокстер 2354
Кол 2463
Коллац 2404
Колмогоров А. Н. 2192
Колпинский 2427
Коннелл 2477 П
Конти 2253
Конфорто 2178
Костиенко А. И. 2470 Д
Костовский А. Н. 2155
Котани 2414
Котхари 2083
Кохендёрфер 2130
Кочина Н. Н. 2213
Коэн 2331
Коэн 2096
Краузе 2124 Д
Крбек 2349
Крейнес М. А. 2408
Кретнер 2237
Кроткова 2309
Кубланов И. М. 2219

Кубо 2170
Кузмак Г. Е. 2245
Кулябко Е. С. 2070 К
Купер 2268
Купер 2409 К
Курцвейль 2298
Кшивоблоцкий 2230

Л

Лаберриг-Фролова 2403
Ла-Кост 2483 П
Лакшмана-Рао 2261
Лалан 2375
Лампрехт 2125
Ландал 2231
Лаптев Г. 2067
Леви 2472 П
Леви 2316, 2322 К
Левитан Б. М. 2270
Ледерман 2318
Лейманис 2190
Лейтнер Р. 2112
Летов А. М. 2194
Лехто 2175
Линник Ю. В. 2325 РЕЦ
Лонге-Хиггинс 2353
Лундквист 2344
Льюис 2479
Лянь 2224
Лященко Н. Я. 2186

М

Маджонес 2252
Майлс 2210
Малышев А. В. 2110 Д
Марки 2177
Мармьон 2352
Мартен 2065
Мартин 2078
Марусси 2359
Матьюс 2247
Мацусита 2304
Мееров М. В. 2220
Мерфи 2463
Мец 2374
Мидлтон 2340, 2341
Мизес 2400
Миколайская 2201
Миллар 2353
Мисоноу 2303
Мокли 2432
Монтгомери 2342
Мори 2133
Моримото 2109 К
Мосс 2457
Моцкин 2389
Мурье 2329

Н

Надь 2163
Накамура 2414
Накано 2307
Наш 2338
Неймарк Ю. И. 2219
Немыцкий В. В. 2193
Несмеянов А. Н. 2046, 2048, 2049
Нечепуренко М. И. 2306
Нивен 2104
Никайдо 2308
Никодим 2301, 2302
Ниренберг 2384
Новоселов С. И. 2265 К
Ноно 2135
Нужин М. Т. 2184 Д
Ньюсом 2480

О

Облат 2101
Обрешков 2289
Одюбер 2069 К
Олейник О. А. 2204
Олех 2398
Оман 2383
Ониси 2074
Оно 2381
Оппенгейм 2091
Оссичини 2281, 2282

П

Палама 2103
Панкраз 2244
Паолантонио 2351
Пеллегрино 2097
Петерман 2310
Петрашень Г. И. 2209
Петров В. В. 2325 РЕЦ, 2327
Пиконе 2057, 2284
Пилоти 2258
Пинл 2370
Пинскер 2320
Питерсен 2272
Плебанский 2226
Племель 2181 К
Помпею 2162
Потапов В. П. 2185 Д
Прахар, 2080, 2084
Прудников В. Е. 2060
Пуканский 2297, 2300

Р

Рабинович Ю. Л. 2279
Радок 2242
Райт 2081
Рамакришнан 2247
Рангасвами 2355
Рассек 2283
Редеи 2128, 2129
Редхеффер 2174
Рейтер 2318
Рейтер 2122
Риге 2428
Ригер 2082
Рицца 2179
Ричмонд 2262
Робертс 2474 П
Рогаченко В. Ф. 2071 РЕЦ
Рогинский В. Н. 2421
Ротстейн 2346
Рубинов 2433
Рутграфф 2451
Рыбкин Г. Ф. (ред.) 2071 РЕЦ

С

Сакамото 2413
Салехов Г. С. 2293
Самюэль 2141 К
Сандфорд 2436, 2449
Сарага 2457
Сасаки 2305
Свирский 2415
Сегре 2366, 2369
Селе 2118
Сер 2107
Сербин 2393
Серпенте 2269
Серпинский 2098, 2105
Серр 2132
Сингх 2173
Сисакян Н. М. 2047
Ситников К. 2147
Скитович В. П. 2312
Склянский А. Л. 2239 Д
Скорняков Л. А. 2131
Скотт 2121
Смирнов В. И. 2070 К
Смирнов С. А. 2411 Д
Смирнова И. М. 2221
Собел 2330
Солзер 2418 К
Солцер 2385
Соркин Ю. И. 2139
Сохон 2433
Спампинато 2180
Старжинский В. М. 2198
Стрейчи 2431
Судзуки М. 2266 РЕЦ
Суетин П. К. 2164
Суиннертон-Дайер 2092

Т

Такено 2379
Танака 2169
Тебо 2354
Тевзадзе Н. 2274
Тейлор 2405
Терасака 2146
Тодд 2394
Толстов 2277 К
Топчиев А. В. 2048, 2049
Тоскано 2287, 2288, 2350
Тукачинский М. С. 2469 К
Туше 2429
Тьюринг 2075

У

Уиддер 2211
Унковский В. А. 2325 РЕЦ
Ура 2195
Уразбаев Б. М. 2086
Усманов Н. К. 2214
Уц 2142
Уэрмер 2294, 2295

Ф

Фаулкс 2115
Федоров Е. Я. 2240 Д
Феньё 2276
Фер 2228
Фиш М. 2314
Фишер 2468
Флауэрс 2478
Форте 2329
Фортра 2061
Фосс 2360 Д
Фостер 2452
Фрей 2466
Фрёйд 2271, 2396
Фрейдкин С. А. 2250 Д
Фридман 2283
Фридрихс 2311 К
Фут 2481

Х

Хадли 2457
Хайерс 2063
Халанай 2200
Харкевич А. А. 2348 К
Хартман 2206
Хартри 2402
Хаски 2444
Хейлс 2361 К
Хейнхольд 2388
Хеллер 2242
Хельстен 2241
Хенкин 2077
Хеннинг 2337 К
Хенриксен 2172
Хенрич 2260, 2286
Хигаси И. 2266 РЕЦ
Хидзиката 2414
Хинчин 2323 К, 2324 К
Хирш 2116
Хиршман 2203
Холиок 2120
Холл 2451
Хоппер 2432
Хори 2114
Хоссу 2407
Хохшилд 2132
Хохштрассер 2218 Д
Хуа Ло-гэн 2051

Ц

Цудзи 2205

Ч

Чак 2291
Чариар 2371
Чарнс 2409 К
Часар 2275
Чжан Су-чэн 2149, 2150
Чжао Чжун-чжэ 2313
Чжэнь Ю-вай 2229

Ш

Шапиро 2111
Шафаревич И. Р. 2085
Шах 2173
Шварц 2234
Шварцман А. П. 2199
Шёнберг 2389
Шестаков В. И 2422, 2423, 2424
Шидловский А. Б. 2088
Шилейко А. В. 2425
Шиффер 2215 К
Шорм Ф. 2053
Шофман А. С. 2059

АЛФАВИТ К АВТОРСКИМ УКАЗАТЕЛЯМ

Русская основа

А а Ӑ ӑ Ӓ ӓ
Б б
В в
Г г Ґ ґ Ғ ғ
Д д
Е е Ѐ ѐ Ё ё Є є Ә ә
Ж ж Ӂ ӂ Ӝ ӝ
З з Ӟ ӟ Ҙ ҙ
И и Ӥ ӥ Ӣ ӣ
Й й
І і Ї ї I I
J j
К к Қ қ Ҟ ҟ Ҡ ҡ
Л л Ӆ ӆ Љ љ
М м
Н н Ң ң Ӈ ӈ Ҥ ҥ Њ њ
О о Ӧ ӧ Ѳ ѳ
П п
Р р
С с Ҫ ҫ
Т т Ť ť Ҭ ҭ Ҕ ҕ
У у Ў ў Ӱ ӱ Ӳ ӳ Ү ү Ұ ұ Ѵ ѵ
Ф ф
Х х Ҳ ҳ
Ц ц Ҷ ҷ
Ч ч Ӵ ӵ Ҷ ҷ Ч ч Ҕ ҕ
Ш ш
Щ щ
Ъ ъ
Ы ы
Ь ь
Э э
Ю ю
Я я

Латинская основа

A a À à Á á Â â Ă ă Ā ā Ã ã Ȧ ȧ Ä ä
Ą ą
B b
C c Ć ć Č č Ç ç
D d Ď ď Đ đ
E e È è É é Ĕ ĕ Ê ê Ē ē Ė ė Ë ë Ę ę
F f
G g Ğ ğ Ǵ ǵ
H h
I i Ɨ ɨ Ị ị Ì ì Í í Î î Ĭ ĭ Ī ī Ï ï Į į
J j
K k Ķ ķ
L l Ĺ ĺ Ł ł Ļ ļ
M m
N n Ń ń Ň ň Ñ ñ Ņ ņ
O o Ò ò Ó ó Ô ô Ŏ ŏ Ō ō Õ õ Ȯ ȯ Ö ö Ő ő Ø ø
P p Þ þ
Q q
R r Ŕ ŕ Ř ř Ŗ ŗ
S s Ś ś Š š Ş ş
T t Ť ť Ţ ţ
U u Ù ù Ú ú Û û Ŭ ŭ Ū ū Ů ů Ü ü Ű ű Ų ų
V v
W w
X x
Y y Ý ý Ŷ ŷ
Z z Ź ź Ž ž Ż ż Ƶ ƶ

Штейнхаус 2332
Штриклер 2255 Д
Шуберт 2285
Шуман 2459
Шуфф 2134

Э

Эйдельнант М. И. 2333
Эллис 2123
Эльсгольц Л. Э. 2197
Эрдёш 2104

Ю

Юаса 2413
Юаса 2403
Юшкевич А. П. (ред.) 2071 РЕЦ

Я

Яглом А. М. 2319, 2320
Янг 2387, 2392
Янош Л. 2136
Яськовский С. 2076

A

Aczél J. 2259, 2406
Agmon Sh. 2390
Agnew R. P. 2273
Albas J. B. 2235, 2236
Alexiewicz A. 2296
Alexits G. 2159
Amemiya A. 2414
Andersen E. S. 2317
Ara R. 2370
Arató M. 2396
Audubert R. 2069 К
Auluck F. C 2083

B

Baer R. 2119
Bambah R. P. 2093, 2094
Baxter I. G. 2458
Behari R. 2372
Behnert-Smirnov K. N. 2154
Bergman S. 2215 К
Besicovitch A. S. 2267
Bhatia A. B. 2256
Bhattacharya P. B. 2372
Bieberbach L. 2106
Blashfield W. H. 2482
Boerner H. 2251
Bonati S. C. 2153
Brafman F. 2278
Brenner J. L. 2099
Browder F. E. 2208
Buchdahl H. A. 2382

C

Callaway J. 2376
Campedelli L. 2062
Carathéodory C. 2254 К
Carlitz L. 2090, 2095, 2100
Cazenave R. 2395
Chak A. M. 2291
Chang S. C. 2149, 2150
Chariar V. R. 2371
Charnes A. 2409 К
Chen Yu Why 2229
Cherubino S. 2113
Chinčin A. 2323 К, 2324 К
Clark D. L. 2475 II
Clark R. E. 2412
Cochran W. G. 2336 К
Cohen A. C., Jr 2331
Cohen E. 2096
Cole B. M. 2463
Collatz L. 2404
Conforto F. 2178
Connell L. H. 2477 II
Conti R. 2253
Cooper R. 2268
Cooper W. W. 2409 К
Caxeter H. S. M. 2353 (ред.)
Császár Á. 2275
Curtis Ch. W. 2126

D

Deaux R. 2357, 2367
Dembowski J. 2052
Derwidué L. 2364
Devidé V. 2358
Dill D. 2451
Dingley E. N., Jr 2473 II
Doetsch G. 2290
Donnert H. 2380
Drake D. W. 2452
Dresden A. 2079
Dunnett Ch. W. 2330
Duparc H. J. A., 2102, 2108 К
Durbin J. 2334

E

Ellis D. 2123
Erdös P. 2104

F

Fenyö I. 2276
Fer F. 2228
Fischer O. 2468
Flowers T. H. 2478
Foote H. L. 2481
Fortet R. 2329
Fortrat R. 2061
Foster H. W. 2452
Foulkes H. O.
Freud G. 2271, 2396
Frey T. 2466
Friedman B. 2283
Friedrichs K. O. 2311 К

G

Gallarati D. 2368
Gates C. R. 2426
Gatteschi L. 2280
Gauthier L. 2365
Genzel L. 2232
Ghermănescu M. 2167
Gněděnko B. 2323 К, 2324 К
Godeaux L. 2363, 2373
Gołąb S. 2397, 2398
Goormaghtigh R. 2356
Gordon A. N. 2246
Graf U. 2337 К
Gray H. J., Jr 2433
Griffin E. L., Jr 2299
Gürsey F. 2378

H

Hadley D. T. 2457
Hails J. S. 2361 К
Halanay A. 2200
Hall B. 2451
Halperin I. 2309
Hartman Ph. 2206
Hartree D. R. 2402
Heinhold J. 2388
Heller A. 2242
Hellsten U. 2241
Henderson A. 2409 К
Henkin L. 2077
Henning H. J. 2337 К
Henrici P. 2260, 2286
Henriksen M. 2172
Hijikata K. 2414
Hirsch K. A. 2116
Hirschman I. I. 2203
Hochschild G. 2132
Hochstrasser U. 2218 Д
Hofmann J. E. 2068 К
Holyoke T. C. 2120
Hopkins E. J. 2361 К
Hopper G. M. 2432
Horn A. 2114
Hosszú M. 2407
Huskey H. D. 2444
Hyers D. H. 2063

I

Ikeda M. 2379
Imura H. 2171
Ingraham R. L. 2377
Isberg R. A. 2476 II
Iseki K. 2087
Ishiguro E. 2413, 2414
Iyer V. G. 2168
Izumi S. 2156, 2157, 2158

J

Jackson J. R. 2391
Jacobson A. W. 2444
Jha P. 2371
Jordan P. 2140

K

Kac M. 2321
Kappos D. A. 2138
Keilson J. 2339
Keller A. 2443
Kelly J. B. 2089
Kertész A. 2117, 2118
Kikuta T. 2386
Kimura T. 2413
Klee V. L. 2142
Kobayashi T. 2401
Kochendörffer R. 2130
Koiter W. T., 2235, 2236
Kołpiński A. 2427
Kothari D. S. 2083
Kotani M. 2414
Krause H. U. 2124 Д
Krbek F. von 2349
Krettner J. 2237
Krotkova V. 2309
Krzywoblocki M. Z. E. 2230
Kubo T. 2170
Kurzweil J. 2298

L

Laberrigue-Frolow J. 2403
La Coste L. J. B. 2483 II
Lakshmana Rao S. K. 2261
Lalan V. 2375
Lamprecht E. 2125
Landahl H. D. 2231
Ledermann W. 2318
Lehto O. 2175
Leimanis E. 2190
Levy M. M. 2472 II
Lévy P. 2316, 2322 К
Lewis W. D. 2479
Lien R. H. 2224
Longuet-Higgins M. S. 2353
Lundkvist K. 2344

M

Magenes E. 2252
Marchi E. 2177
Marmion A. 2352
Martin Ch.-N. 2065
Martin R. M. 2078
Marussi A. 2359
Mathews P. M. 2247
Matsushita S. 2304
Mauchly J. W. 2432
Metz A. 2374
Middleton D. 2340, 2341
Mikolajska Z. 2201
Miles J. W. 2210
Miller J. C. P. 2353
Mises R., von 2400
Misonou Y. 2303
Montgomery G. F. 2342
Mori M. 2133
Moss F. 2457
Motzkin T. S. 2389
Mourier E. 2329
Murphy M. H. 2463

N

Nakamura T. 2414
Nakano H. 2307
Nash J. 2338

Newsom J. B. 2480
Nikaido H. 2308
Nikodým O. M. 2301, 2302
Nirenberg L. 2384
Niven I. 2104
Nônо T. 2135

O

Obláth R. 2101
Obreschkoff N. 2289
Ohmann D. 2383
Ohnishi M. 2074
Olech C. 2398
Ôno Y. 2381
Oppenheim A. 2091
Ossicini A. 2281, 2282

P

Palamà G. 2103
Pankraz O. 2244
Paolantonio R. 2351
Pellegrino F. 2097
Petermann A. 2310
Petersen G. M. 2272
Picone M. 2057, 2284
Piloty H. 2258
Pinl M. 2370
Plebański J. 2226
Plemelj J. 2181 К
Pompeiu D. 2162
Prachar K. 2080, 2084
Pukanszky L. 2297, 2300

R

Radok J. R. M. 2242
Ramakrishnan A. 2247
Rangaswami A. K. 2355
Rédei L. 2128, 2129
Redheffer R. M. 2174
Reiter H. J. 2122
Reuter G. E. H. 2318
Richmond D. E. 2262
Rieger G. J. 2082
Riguet J. 2428
Rizza G. B. 2179
Roberts B. 2474 II
Rothstein J. 2346
Rubinoff M. 2433
Russek J. 2283
Ruthrauff R. 2451

S

Sakamoto M. 2413
Saltzer Ch. 2385
Salzer H. E 2418 К
Samuel P. 2141 К
Sandford L. 2436, 2449
Saraga W. 2457
Sasaki S. 2305
Schiffer M. 2215 К
Schoenberg I. J. 2389
Schubert A. 2285
Schuff H. K. 2134
Schumann R. 2459
Schwarz M. J. de 2234
Scott W. R. 2121
Segre B. 2366, 2369
Ser J. 2107
Serbin H. 2393
Serpente G. 2269
Serre J.-P. 2132
Shah S. M. 2173
Shapiro V. L. 2111
Sierpiński W. 2098, 2105
Singh S. K. 2173
Sobel M. 2330
Sohon H. 2433
Spampinato N. 2180
Steinhaus H. 2332
Strachey C. S. 2431
Strickler P. 2255 Д
Swinnerton-Dyer H. P. P. 2092
Swirski W. 2415
Szele T. 2118
Sz.-Nagy G. 2163

T

Takeno H. 2379
Tanaka C. 2169
Taylor W. C., Jr 2405
Terasaka H. 2146
Thébault V. 2354
Todd J. 2394
Tolstov G. 2277 К
Toskano L. 2287, 2288, 2350
Touchais M. 2429
Tsuji M. 2205
Turing A. M. 2075

U

Ura T. 2195
Utz W. R. 2142

V

Vandiver H. S. 2064
Vaulot E. 2343
Villamayor O. B. 2127
Voss F. 2360 Д
Vroelant C. 2292

W

Weier J. 2143, 2144
Weinstein A. 2207
Weiss L. 2328
Wermer J. 2294, 229
Widder D. V. 2211
Wijngaarden A., van 2102
Williams J. 2212
Wintner A. 2206
Witt E. 2140
Wittich H. 2189
Wolf E. 2256
Woodward J. 2331
Wright E. M. 2081

Y

Yoneda K. 2335
Young A. 2387, 239
Yuasa S. 2413
Yuasa T. 2403

Z

Zemanek H. 2345

小林稹作 2401
東屋五郎 2266
森本清吾 2109
秋月康夫 2266
華羅庚 2051
趙仲哲 2313
鈴木通夫 2266

Технический редактор *К. И. Игнаткова*

Подп. к печати 25/IV—1955 г. Формат бумаги 84×108¹/₁₆. Бум. л. 3,75 Печ. л. 12
Заказ. 1130 Тираж 3.400 экз. Уч.-изд. л. 19,4 Т-02473

2-я тип. Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., д. 10